Sonder-Abdruck aus
„Zeitschrift für Psychologie und Physiologie der Sinnesorgane".
Bd. XX.
Verlag von Johann Ambrosius Barth in Leipzig.

17

Ueber geometrisch-optische Täuschung.

Von

W. von Zehender.

(Mit 14 Fig.)

Einleitung.

Es mag in doppelter Beziehung gewagt erscheinen auf die sogenannten optisch - geometrischen Täuschungen zurückzukommen; einestheils deswegen, weil diese Frage schon oftmals Gegenstand gründlicher Untersuchung von Seiten competentester Autoren gewesen ist, anderentheils deswegen, weil zu befürchten steht, die Geduld der Leser möge, durch die berechtigte Annahme, dafs etwas Neues nicht leicht vorgebracht werden kann, bereits erschöpft sein. — Dennoch möchten wir versuchen die Aufmerksamkeit derjenigen Leser, die sich für diese Frage besonders interessiren auf die „Physiologischen Untersuchungen im Gebiete der Optik" von A. W. Volkmann (1864) hinzulenken, die, unseres Wissens, zur Erklärung der hier in Rede stehenden Phänomene noch nicht verwerthet worden sind.

Volkmann hat bekanntlich durch zahlreiche, sehr genaue Messungen festgestellt, dafs in jedem einzelnen Auge die scheinbare Horizontal - Richtung nicht genau mit dem wahren Horizont übereinstimmt, und dafs, in entsprechender Weise, auch die scheinbare Vertical-Richtung von der wahren Verticalen abweicht. Wir sind der Meinung, dafs diese zweifellos festgestellte Thatsache dazu dienen könne, wenigstens einen Theil der sogenannten Täuschungen in befriedigender Weise zu erklären.

Indem wir diese Frage noch einmal in Angriff nehmen, finden wir uns den hochinteressanten Arbeiten von Lipps gegenüber in einem Gegensatz ganz eigener Art. — Wir wünschen, soweit irgend thunlich, auf unserem physiologisch-anatomischen

Standpunkte stehen zu bleiben, und Lipps behauptet sich ebenso unentwegt auf seinem raumästhetisch-psychologischen Standpunkte.

Lipps sucht die geometrisch-optischen Täuschungen „abzuleiten“ von imaginären Kräften, die wohl geeignet sein könnten die Täuschung zu bewirken wenn sie realiter da wären; sie sind aber nur da in der Imagination, und können deshalb über den wirklichen Sachverhalt keine Auskunft geben. — Allerdings wurzeln diese imaginären Kräfte in den realen Kräften der Natur, und besonders in der, alles Körperliche durchdringenden, realen Kraft der Schwere. — Die Naturkräfte sind aber nicht frei für sich bestehende, unabhängig von einander wirkende Kräfte, die man „wirkend und gegenwirkend“ anbringen kann wo und wie man will; sie stehen unter sich in unlösbarem Zusammenhange.

Lipps beginnt seine Abhandlung über „Raumästhetik und geometrisch-optische Täuschungen“ mit einem höchst charakteristischen Beispiel. Er sagt:

„Die Dorische Säule richtet sich auf“. Wir müssen hierauf entgegnen: nein — die Säule richtet sich nicht auf aus eigener Kraft; sie wird aufgerichtet von Menschenhänden und bleibt — vermöge des Gesetzes der Schwere — so lange aufgerichtet stehen, bis ihre Gleichgewichtslage durch anderweitige Kräfte gestört und ihr Schwerpunkt über die Grenzen ihres Fufspunktes hinausgerückt wird. Alsdann fällt sie unfehlbar zu Boden, und bleibt bis auf Weiteres am Boden liegen. Durch ihre „eigentliche Thätigkeit“ kann sie sich nicht wieder emporrichten; sie kann nicht „die Schwere überwinden“; eine „gegen die Schwere gerichtete Thätigkeit“ besitzt sie nicht. Wohl aber kann die menschliche Phantasie, der Säule und jedem anderen leblosen Dinge, Leben und Lebenskraft einhauchen, ähnlich wie Minerva einst dem aus Thon und Wasser geformten Menschen des Prometheus Leben eingehaucht hat. — Beides existirt jedoch nur im Gedankenleben des Menschen; nicht in realer Wirklichkeit.

Nach Lipps bewegen sich alle Linien und alle linearen Raumformen „aus eigener innerer Thätigkeit“ und „durch Wirkung eigner innerer Kräfte“; sie nöthigen dadurch den Beschauer das zu sehen, was als Folge solcher Bewegung noth-

wendigerweise erscheinen müfste. Nach LIPPS haben wir es „durch Erfahrung dahin gebracht, dafs wir keine Linie sehen können, ohne in ihr eine Bewegung denken zu können".

Es wird nöthig sein daran zu erinnern, dafs hier fast ausschliefslich nur von Zeichnungen (von geometrischen Figuren) die Rede ist; d. h. von verschieden geformten Linien in der Ebene eines Papiers, die — ganz nach Analogie unserer Buchstabenschrift — etwas Anderes bedeuten können als das was sie, physikalisch genommen, sind. — LIPPS überträgt aber die Gedanken-Bewegungen des Zeichners unmittelbar auf die Zeichnung selbst, und läfst sie durch die Zeichnung auf den Beschauer mittelbar dergestalt zurückwirken, dafs dieser, das was er sieht, anders sieht als es in Wirklichkeit ist, und zwar, nicht blos mit seiner Einbildungskraft, sondern mit seinen leiblichen physischen Augen. Der „krafterfüllte Raum" nimmt die Sinne des Beschauers vollständig gefangen. — Die Linien bleiben nicht mehr in der Ebene des Papiers; sie richten sich empor, sie strecken und recken sich, sie erweitern und verbreitern sich, sie ziehen sich ein und bauchen sich aus — kurz sie leben und regen und bewegen sich aus eigener Kraft nach allen Dimensionen des Raumes!

Eine Zeichnung in der Ebene des Papiers, die aus der Ebene des Papiers heraustritt, ist dadurch allein schon eine grofsartige Täuschung! Wir haben uns aber an diese (perspektivische) Täuschung so vollständig gewöhnt, dafs wir sie gar nicht mehr als solche gelten lassen. Auch die täuschende Wirkung einer Brille, oder eines Spiegels, oder eines Fernrohres oder eines Mikroskopes lassen wir kaum noch als Täuschung gelten, weil wir die Gesetze kennen, nach denen sich die Täuschung vollzieht; damit zugleich verschwindet der täuschende Zauber; die Täuschung wird nun nicht mehr Täuschung genannt; sie ist klar verstandene optische Nothwendigkeit geworden.

Der Zeichner beabsichtigt aber zu täuschen; er will seine künstlerischen Ideen versinnlichen; er will die erfahrungsmäfsig gewonnene Fähigkeit „in jeder Linie eine Bewegung denken zu können" benutzen um den Gedanken der Bewegung da zu erregen, wo kein Gedanke von Bewegung ist. Und der beschauende Kunstfreund — weit entfernt nach den Ursachen der Täuschung zu fragen — wünscht seinerseits nichts

sehnlicher als durch die Werke der Kunst recht gründlich getäuscht zu werden. Gerade darin findet er seinen höchsten Genufs, seine gröfste Befriedigung.

Dieser künstlerische Standpunkt — wer möchte das wohl bestreiten! — ist voll und ganz berechtigt; er verdient und geniefst mit vollstem Rechte die allseitigste und weitverbreitetste Anerkennung — es ist aber nicht u n s e r S t a n d p u n k t!

Wir, die wir an exacte Messung gewöhnt sind, stehen auf dem Boden täuschungsfremder Natur-Wirklichkeit; wir wünschen nicht uns täuschen zu lassen; wir wünschen im Gegentheil den prosaischen Ursachen täuschender Erscheinungen nachzuspüren, soweit es dem menschlichen Erkennen erlaubt ist; wir möchten gerne sehr genau wissen wie das Leben und „das Geschehen“ im Inneren unseres Auges sich vollzieht; ganz besonders dann, wenn von Täuschungen die Rede ist.

Das menschliche Auge ist oft, und mit vollem Recht, mit einem photographischen Apparat verglichen worden. Ohne Zweifel hat die empfindliche Platte des Photographen grofse Aehnlichkeit mit der Netzhaut des Auges, wenn auch die chemischen Vorgänge verschiedener Art sind. An und für sich betrachtet kann Aehnliches in jedem chemischen oder physikalischen Laboratorium ausgeführt werden. — Physikalisch verschieden sind beide Vorgänge besonders dadurch, dafs die Netzhaut für neue Bilder jederzeit empfänglich bleibt, wobei die alten Bilder von ihrer Fläche zwar verschwinden, aber in der Vorstellung und im Gedächtnifs unbeschränkt lange Zeit festgehalten und aufbewahrt werden können. — Der höhere Unterschied besteht aber darin, dafs das Auge mit sammt seiner Netzhaut im Dienste der „Psyche“ steht. Das Netzhautbildchen ist nicht ebenso wie die Photographie, ein stabil gewordenes Werk des Sonnenlichtes. Mit dem Netzhautbildchen hat der Vorgang im lebendigen Auge seinen Abschlufs noch nicht erreicht; hier kommt noch ein „E t w a s“ hinzu, welches von diesem Bildchen N o t i z n i m m t, und aus dem Bildchen die Beschaffenheit der Dinge der Aufsenwelt zu erforschen sich bemüht. Nicht dieses Bildchen selbst, sondern jenes „E t w a s“ bringt der Seele Nachricht über das, was in der Aufsenwelt vorgeht und erklärt ihr die Bedeutung der Veränderungen, welche durch Einwirkung der Dinge der Aufsenwelt im Auge entstanden sind. — Ist dieses „Etwas“ — welches wir Vernunft nennen —

selbst noch nicht genügend unterrichtet, oder ist es nicht aufmerksam genug um die Netzhauteindrücke richtig zu verstehen, dann ist allerdings eine Täuschung der Seele, — als Folge falsch verstandener Sinneseindrücke — leicht möglich; nicht möglich ist aber, dafs unsere Sinne die empfangenen Eindrücke unrichtig empfangen oder unrichtig wiedergeben, denn ihre Wechselwirkung mit den auf sie einwirkenden Kräften der Aufsenwelt ist durch die unwandelbaren Gesetze der Natur ein für allemal festgelegt!

In diesem Sinne glauben wir sagen zu dürfen: „unsere Sinnesorgane täuschen uns nicht". — Das was uns täuscht ist Mifsverständnifs oder Unkenntnifs der Bedeutung unserer Sinneseindrücke. Nur die „psychische Energie" ist dem Irrthum unterworfen; sie darf deshalb auch nicht aus eigener Initiative sich zur Lehrmeisterin der Natur aufwerfen; sie mufs sich immer als lernbegierige Schülerin empfangener Sinneseindrücke bezeigen.

In diesem Sinne wünschen wir der Frage näher zu treten, ohne uns dem von Lipps eingenommenen Standpunkt anschliefsen zu können, aber auch ohne seiner Auffassungsweise uns entgegenstellen zu wollen.

Um den Umfang unserer Arbeit nicht über die erlaubten Grenzen zu erweitern haben wir auf Berücksichtigung der reichhaltigen Literatur fast gänzlich verzichtet. Vielleicht läfst sich diese Lücke durch eine spätere nachträgliche Bearbeitung einigermaafsen ausgleichen. Für heute müssen wir uns darauf beschränken nur die Namen einiger derjenigen Autoren (nebst Angabe der Jahreszahl) zu nennen, die sich besonders eingehend mit der hier zu besprechenden Frage beschäftigt haben.

Unseres Wissens ist J. Oppel in Frankfurt a. M. derjenige gewesen, der die ersten Beobachtungen (1854/55) veröffentlicht und überhaupt die Frage der geometrisch-optischen Täuschungen in Flufs gebracht hat. Ihm folgten: F. Zöllner (1860), Ewald Hering und Kundt (1861), F. C. Müller-Lyer (1889), Th. Lipps (1891/98), F. Auerbach (1894), Thierry (1895), Ernst Burmester (1896), G. Heymans, W. Einthoven und Hugo Münsterberg (1897), W. Filehne, W. Wundt und St. Witasek (1898) und einige Andere, deren Schriften nicht in unsere Hände gelangt sind.

Die noniusartige Verschiebung.

Die vorerwähnten A. W. Volkmann'schen Untersuchungen haben gezeigt, dafs die Sinnesempfindung des Horizontalen und des Verticalen in jedem einzelnen menschlichen Auge nicht genau mit der Wirklichkeit übereinstimmt, oder mit anderen Worten: dafs der sogen. verticale Meridian jedes einzelnen Auges nicht genau vertical steht.

Volkmann's Versuche wurden in folgender Weise ausgeführt:

Zwei Zeiger, deren jeder auf einer, mit genauer Kreistheilung versehenen Scheibe drehbar angebracht war, wurden in geeigneter Weise vor dem Beobachter aufgestellt. Der eine Zeiger — „der constante Diameter" — wurde beliebig eingestellt; von dem Beobachter wurde verlangt, er solle den anderen Zeiger — „den mobilen Diameter" — möglichst genau in parallele Richtung zum constanten Durchmesser bringen. Der Abweichungsfehler wurde „Kreuzungswinkel" genannt und konnte bis auf Zehntheile eines Grades an den Kreistheilungen abgelesen werden.[1]

Das allgemeine Ergebnifs dieser mühsamen und zeitraubenden Untersuchungen lautet:

„Die Diameter, welche parallel erscheinen, divergiren ohne Ausnahme nach oben."

Auf tabellarische Wiedergabe einiger Zahlenbefunde werden wir bei späterer Gelegenheit zurückkommen; hier mag es genügen zu bemerken, dafs der Kreuzungswinkel bei verticaler Stellung des „constanten Diameter" im Mittel von 60 Beobachtungen = 2,15° gefunden wurde. Bei schräger Einstellung fand sich der Kreuzungswinkel immer kleiner werdend, bis er, bei 90° einen niedrigsten Werth (= 0,43°) erreichte, um dann in annähernd gleichem Verhältnisse wieder zu steigen, bis er, bei 180° angelangt, zu derselben Kreuzwinkelstellung zurückkehrte, die er bei lothrechter Stellung des constanten Diameter (bei 0°) anfänglich inne hatte.

---

[1] Eine genauere Beschreibung des Verfahrens und des dazu benutzten Instrumentes, nach Volkmann's eigenen Worten, folgt im letzten Abschnitt (Nachträgliches).

Gestützt auf diese werthvollen Untersuchungen wollen wir versuchen, die von POGGENDORFF zuerst bemerkte und wohl auch von ihm zuerst so benannte „noniusartige Verschiebung" und einige verwandte Täuschungserscheinungen, einer genaueren Prüfung zu unterziehen.

Die oft reproducirte Täuschungsfigur der noniusartigen Verschiebung (Fig. 1), die wir als elementares Theilstück der ZÖLLNER'schen und aller ähnlichen Täuschungsfiguren betrachten, setzen wir zwar als bekannt voraus, müssen sie hier jedoch, zur Vergleichung mit anderen Figuren, noch einmal reproduciren.

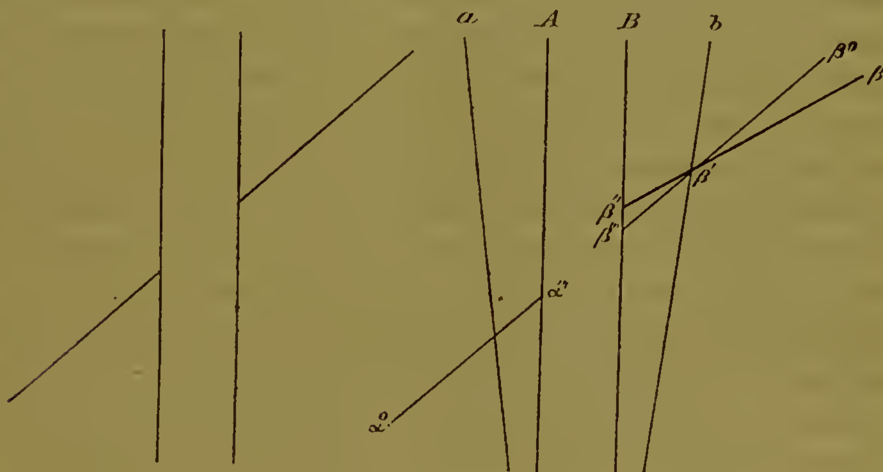


Fig. 1. Fig. 2.

In Worten ausgedrückt läſst sich die POGGENDORFF'sche Täuschung folgenderweise formuliren:

Wenn eine schräg verlaufende gerade Linie durch eine, von vertical stehenden, parallelen Grenzlinien begrenzte Figur in ihrem Verlauf unterbrochen wird, dann trifft der höher liegende Theil dieser schrägen Linie die ihm zunächst liegende Parallellinie an einem höheren Punkt, als es die geradlinige Verlängerung des anderen Theils der schrägen Linie zu fordern scheint. — Wodurch entsteht diese täuschende Verschiebung?

Darüber soll die Figur 2 nähere Aufklärung geben.

Die beiden Linien A und B in vorstehender Figur 2 seien die wirklichen Parallellinien, durch deren Zwischenraum die Continuität des Schrägstriches ($\alpha^0 \beta^0$) unterbrochen wird. Nach den Ergebnissen der VOLKMANN'schen Versuche erscheinen diese beiden Parallellinien nach oben schwach divergent. Die Divergenz soll — deutlichkeitshalber in starker Uebertreibung — dar-

gestellt sein durch die Linien *a* und *b*, welche mithin zeigen sollen, wie verticale Parallellinien erscheinen, wenn sie nicht von Stelle zu Stelle auf die stetige Gleichheit ihrer Entfernung von einander geprüft, sondern im Gesammtüberblick betrachtet werden.

Eine von α^0 in gerader Richtung fortgeführte Linie treffe die Linie *A* in α^{III} und treffe, mit Ueberspringung des Zwischenraumes, die jenseitige Parallellinie (*B*) in β^{III}, und endlich *b* in β^{I}. — Der spitze Durchschneidungswinkel ($B\beta^{III}\beta^0$) ist offenbar der richtige Durchschneidungswinkel. Wir haben keine Veranlassung, ihn für gröfser oder kleiner zu halten, als er in Wirklichkeit ist. Die Linie *b* ist aber, wie wir (in starker Uebertreibung) annehmen, die scheinbare Grenzlinie des Zwischenraumes der beiden Parallelen (*A* und *B*). An dieser scheinbaren Grenzlinie (*b*) glauben wir die Fortsetzung der von α^0 ausgehenden geraden Linien zu sehen; hier müssen wir also den richtigen Durchschneidungswinkel ansetzen, um die vermeintlich gerade Fortsetzung der von α^0 ausgehenden Linie zu finden. Es sei also der Winkel $b\,\beta^I\,\beta = B\,\beta^{III}\beta^0$. Demnach wäre $\beta^I\beta$ die, in Folge der Divergenz, scheinbar veränderte Richtung der geradlinigen Fortsetzung von $\alpha^0\beta^I$. Diese Richtung, rückwärts verlängert, trifft die wirklich verticale *B* in β^{II}, und für die wirklichen Parallellinien *A* und *B* haben wir, als Verlängerung von $\alpha^0\alpha^{III}$, nun die Linie $\beta^{II}\beta$. Der Punkt β^{II} liegt aber höher als β^{III} und die Richtung $\beta^{II}\beta$ liegt nicht in gradliniger Fortsetzung von $\alpha^0\alpha^{III}$. Die hier gefundene Construction ergiebt also gerade das, was wir an der Täuschungsfigur irrthümlich zu sehen vermeinen: beide einander zugewendeten Endstücke der durch den leeren Zwischenraum unterbrochenen geraden Linie bilden einen treppenartigen Absatz oder eine „noniusartige Verschiebung“.

Da der Divergenzwinkel der beiden scheinbar parallelen (pseudoparallelen) Verticallinien (den wir 2 ε nennen wollen) immer sehr klein ist, so kann man — der Vereinfachung wegen — diesen Winkel ganz auf die eine Seite der Figur (z. B. nach rechts hin) verlegen, und auf der anderen Seite die Parallele in ihrer richtigen Stellung ($\varepsilon = 0$) belassen; ja, man wird es so machen müssen, wenn man in der Zeichnung nicht allzusehr übertreiben, und doch die Abweichung vom Parallelismus deutlich zur Anschauung bringen will. — In dem hier vorausgesetzten

Falle fällt *a* mit *A* zusammen; man hat sich also in Figur 2 nur die Linie *a* (als congruent mit *A*) aus der Zeichnung wegzudenken um ein einfachstes Bild der Construction einer noniusartigen Verschiebung zu erhalten. Diese Vereinfachung ist um so eher zulässig, weil man — bei der Kleinheit des Winkels ε — die nach links divergirende Linie (*a*) durch eine kaum bemerkbare Drehung der Zeichnung ohnehin schon in verticale Richtung bringen kann.

In jedem anderen Falle aber hätten wir — um der Vollständigkeit zu genügen — die veränderte Richtung der Durchschneidungslinie auf b e i d e n Seiten zu berücksichtigen.

Daraus resultirt die etwas complicirtere Figur 3, zu deren Erläuterung kaum noch weitere Worte erforderlich sind.

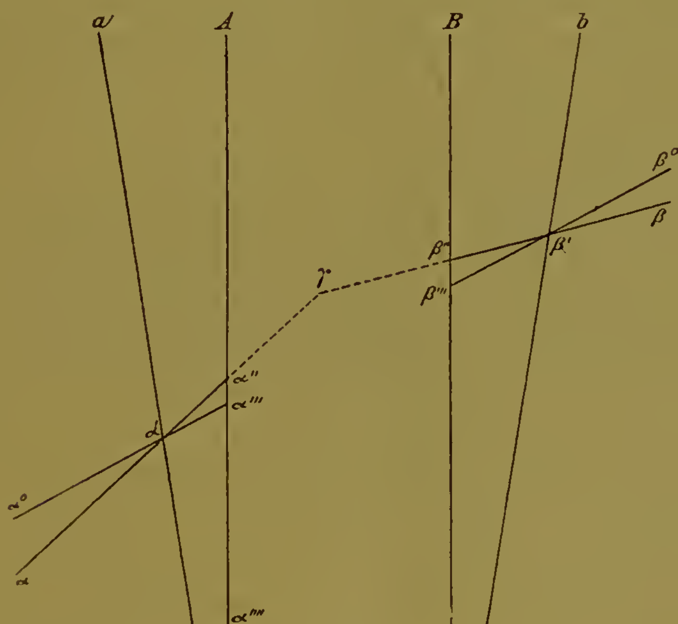


Fig. 3.

Man ersieht leicht aus dieser Figur, dafs der Durchschneidungswinkel auf der höher liegenden Eintrittsstelle g r ö f s e r und auf der tieferliegenden k l e i n e r wird, als er in Wirklichkeit sein würde ($\alpha^{I}\,\alpha^{II}\,\alpha^{IV} < \alpha^{I}\,\alpha^{III}\,\alpha^{IV}$). — Näher betrachtet ist — wenn die Figur ganz symmetrisch steht — der nach unten sich öffnende spitze Winkel ($\alpha^{0}\,\alpha^{III}\,\alpha^{IV}$) genau um ebenso viel (nämlich um den Winkel ε) kleiner, als der nach oben sich öffnende Winkel ($B\,\beta^{III}\,\beta^{0} = \alpha^{0}\,\alpha^{III}\,\alpha^{IV}$) scheinbar gröfser wird, als er sein sollte.

Die Summe dieser beiden Differenzen ist gerade ebenso grofs wie der, durch Verlängerung der beiden Linien (a und b) entstehende spitze Winkel (den wir 2ε genannt haben). Beide Hälften der schrägen Linie durchkreuzen sich scheinbar in dem leeren Zwischenraum und bilden in ihrem Durchkreuzungspunkt (γ) den Scheitelpunkt eines nach unten offenen stumpfen Winkels von 180^0 weniger dem durch Verlängerung der beiden Linien a und b entstehenden spitzen Winkel (2ε), welcher in unserer Figur deutlichkeitshalber viel zu grofs gezeichnet ist.

Je nachdem wir in unserer Vorstellung die Gröfse der spitzen Winkel zwischen den Linien A und a einerseits und zwischen B und b andererseits — bewufst oder unbewufst — zu- oder abnehmen lassen, wird auch die Täuschung gröfser oder geringer; sie wird auf Null reducirt, sobald jener spitze Winkel selbst gleich Null, oder — anders ausgedrückt — sobald der wahre Parallelismus der beiden Linien A und B in unserer Vorstellung vollkommen hergestellt ist.

Die Täuschung erscheint in dem hier gezeichneten Falle offenbar etwas abgeschwächt; sie kann aber nicht ganz verschwinden, denn die verlängerte Linie $\beta\gamma$ wird die Linie A immer an einem höher als α^{III} gelegenen Punkt treffen, so lange der Winkel $\alpha\gamma\beta$ noch kleiner ist als 180^0; ebenso lange wird aber immer auch eine, wenn auch nur geringe treppenförmige Abstufung bemerkbar bleiben.

Dies sind indessen theoretische Betrachtungen, bei denen wir nicht länger verweilen wollen.[1]

Die Frage nach einer anatomischen Begründung der scheinbaren Divergenz paralleler Linien lassen wir unberührt. Das ist eine Frage deren Beantwortung von den Netzhaut-Anatomen noch erwartet werden mufs. Nur soviel möge hier darüber bemerkt sein, dafs, wenn man den Punkt des schärfsten Sehens in der Netzhaut, als den einen Pol ihrer kugelförmigen Gestalt betrachtet, der andere, diesem entgegengesetzte Pol dann in derjenigen Linie liegen mufs, welche jenen ersten Pol mit dem fixirten Punkt in der Aufsenwelt verbindet (Gesichtslinie). Jede gerade Parallellinie

---

[1] Zur Erklärung der Fig. 3. — Die Linien AB und ab haben dieselbe Bedeutung wie in Fig. 2. — Die wahre Durchkreuzungslinie ist durch die Linien-Abschnitte $\alpha^0\,\alpha^{III}$ und $\beta^{III}\,\beta^0$ angedeutet; ihre scheinbare Lage zeigen die Linien-Abschnitte $\alpha\,\alpha^{II}$ und $\beta\,\beta^{II}$ und deren bis γ fortgeführte punktirte Verlängerungen.

aber, die den fixirten Punkt irgendwie durchschneidet, mufs in der Netzhaut ein Bild entwerfen, welches in einen gröfsten Kreis der kugelförmigen Netzhautkrümmung fällt. Da aber alle gröfsten Kreise, in ihrem Verlauf vom Pol bis zum Aequator, divergiren, so liegt es nahe, die subjectiv-scheinbare Divergenz paralleler Linien hiermit in Zusammenhang zu bringen. — Es fehlt indessen noch viel an einer vollbefriedigenden Uebereinstimmung, es fehlt im Besonderen die genaue Kenntnifs der verschiedenen Gröfse der Empfindungskreise der Netzhaut und ihrer topographischen Vertheilung in nächster Umgebung der fovea centralis. Dagegen würde die querovale Form der macula lutea, deren Durchmesserverhältnifs von den Autoren wie 4 zu 3 angegeben wird und „die ihr ähnliche Gestalt" der fovea centralis, der Hypothese einer anatomischen Grundlage wenigstens nicht im Wege stehen.

Die noniusartige Verschiebung bei veränderter Blickrichtung.

Bevor wir weitergehen, müssen wir darauf hinweisen, dafs zwei verschiedene Arten des Sehens zu unterscheiden sind, je nach der Verschiedenheit, mit der unsere Vernunft sich der Sinnesorgane bedient. — Gewöhnlich blicken wir umher, ohne die Aufmerksamkeit auf irgend einen bestimmten Gegenstand zu richten. Zu anderer Zeit concentriren wir alle Aufmerksamkeit[1] auf einen einzigen ganz bestimmten Punkt. — Ersteres wollen wir das periskopische, letzteres das episkopische Sehen nennen.

Beim periskopischen Sehen betrachten wir in der Regel nur vorübergehend, und abwechselnd bald diesen, bald jenen Gegenstand.

Die leichte Beweglichkeit unserer Augen und unseres Kopfes, verbunden mit der Fähigkeit, das Bild eines momentan gesehenen Gegenstandes noch eine Zeitlang lebendig im Gedächtnisse festhalten zu können, bestärkt uns in der Meinung, dafs wir Alles, was vor uns liegt, gleichzeitig und mit gleicher Deutlichkeit, wie ein einziges grofses, vor unserem Blickfelde ausgebreitetes Gemälde, sehen.

[1] Aufmerksamkeit ist eine Function der Vernunft.

Beim episkopischen Sehen dagegen, wobei alle Aufmerksamkeit nur auf einen Punkt gerichtet ist, entziehen wir unsere Aufmerksamkeit den mehr peripherisch gelegenen Gegenständen. Je kleiner der Gegenstand, den wir episkopisch betrachten, und je gespannter alle Aufmerksamkeit nur auf diesen einen kleinen Gegenstand gerichtet ist, umsoweniger werden wir entfernter Liegendes bemerken, umsomehr verschwimmt das Areal des peripherisch noch Bemerkbaren oder Erkennbaren. Versucht man z. B. in einem beliebigen Buche einen einzelnen Buchstaben fest zu fixiren, während rechts und links die anderen Buchstaben mit weifsem Papier bedeckt sind, und versucht man nun — ohne das Auge im Mindesten zu bewegen — einen der nebenstehenden und freigelegten Buchstaben nach dem anderen zu erkennen, dann wird vielleicht Mancher, der diesen kleinen Versuch noch nie gemacht hat, erstaunt sein zu bemerken, dafs er kaum im Stande ist, den dritten oder vierten Nebenbuchstaben mit voller Sicherheit zu erkennen, während man doch, bei jener anderen Art des Sehens, ganze Worte, ja, ganze Zeilen sozusagen mit einem Blick übersehen und lesen kann.

Wir können aber auch beide Gesichtslinien auf einen bestimmten Punkt richten, und dennoch unsere Aufmerksamkeit nicht diesem Punkte, sondern seiner Umgebung, soweit sie bei unveränderter Blickrichtung noch erkennbar ist, zuwenden. Diese besondere, gemischte Art des periskopischen und episkopischen Sehens, die oft auch ohne besondere Intention (unbewufst) erfolgt, ist diejenige Art des Sehens, bei welcher optische Täuschungen am leichtesten vorkommen. — Nicht das Auge, sondern die Aufmerksamkeit ist es, welche in diesem Falle umherspäht!

In Bezug auf die scheinbar nach oben divergirenden Parallellinien haben wir noch zu bemerken, dafs diese Schein-Parallelen sich mit unseren vertical verlaufenden Blickbewegungen scheinbar mit bewegen und immer in dem z. Zt. fixirten Punkt mit den wahren Parallelen congruiren. Bei anfänglich fester Fixation des unteren oder des oberen Endpunktes der Parallellinien und bei raschem Blickwechsel, glaubt man zuweilen eine Bewegung der Parallellinien wahrnehmen zu können: man glaubt sehen zu können, wie die scheinbare Divergenz in den richtigen Parallelstand beider Linien sich wieder zurückbewegt.

Nach dieser kleinen Abschweifung kehren wir zur POGGENDORFF'schen Täuschungsfigur zurück, und bemerken zuvor nur noch, daſs alles periskopische Sehen eigentlich doch nur aus unzähligen kurzen Zeitmomenten eines mehr oder weniger aufmerksamen episkopischen Sehens zusammengesetzt ist. Bei jedem episkopisch betrachteten Punkt ist von einer Divergenz paralleler Linien nichts zu bemerken; die wahren und die falschen Parallelen fallen zusammen. Da aber jeder periskopisch betrachtete Punkt, in jedem kleinsten Zeitmoment, sogleich wieder in einen episkopischen verwandelt werden kann, und in einen solchen fast unwillkürlich verwandelt wird sobald unsere Aufmerksamkeit sich auf denselben hinrichtet, so kann dadurch der Eindruck des periskopischen Sehens sehr leicht wieder verwischt werden.

Wenn wir nun einen einzelnen Moment episkopischer Betrachtungsweise besser und anschaulicher darstellen wollen, dann müssen wir unsere frühere Figur in nachstehender Weise modificiren.

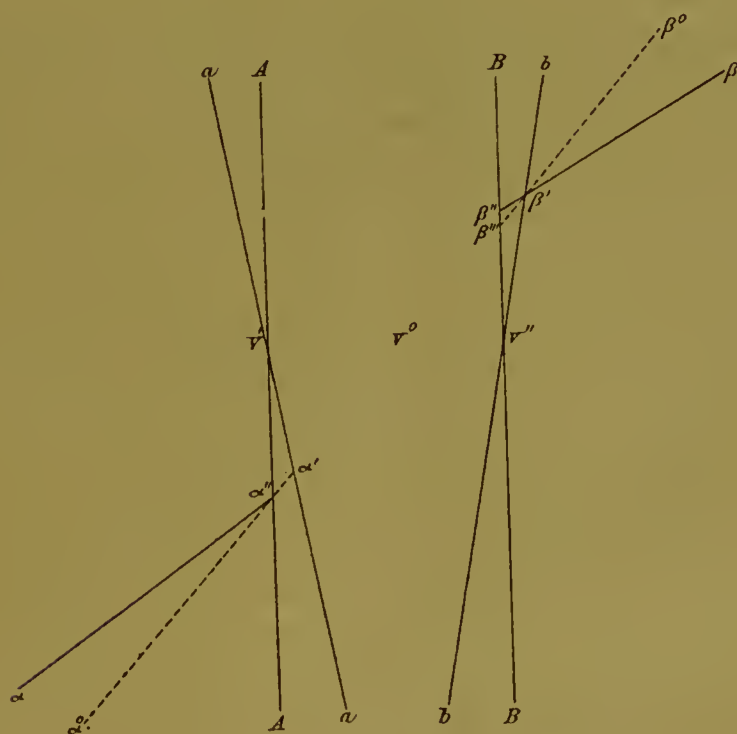


Fig. 4.

Die Buchstaben $v^{I}\, v^{0}\, v^{II}$ sollen den Durchschnitt einer, zunächst noch unverändert festgehaltenen, Visir-Ebene bedeuten.

Im Uebrigen ist die Buchstabenbezeichnung den vorhergehenden Figuren analog.

Bemerkenswerth, im Vergleich mit Figur 3, ist, dafs hier der tiefer liegende Durchschneidungswinkel $(\alpha \alpha^{II} A)$ nicht kleiner, sondern grö*fser* erscheint als er ist, wodurch die täuschende Wirkung nun nicht geschwächt, sondern im Gegentheil bedeutend verstärkt hervortritt.

Erheben wir unsere Visir-Ebene oder senken wir sie, dann würde, bei unveränderter Gröfse des Divergenzwinkels, (2ε) die Durchschnittslinie $v^{I} v^{0} v^{II}$ sich miterheben oder mitsenken, und die ganze Figur würde dementsprechend sich so verändern, dafs, wenn z. B. v^{II} bis β^{II} hinaufrückt, der Abstand α^{II} und α^{I} sich entsprechend vergröfsert, weil die ganze Durchschnittslinie, mithin auch v^{I}, sich zu gleicher Höhe (β^{II}) miterhebt. Die Täuschungsfigur wird dadurch zwar verändert, in ihrer Wirkung aber keineswegs geschwächt.

In der Visir-Ebene $v^{I} v^{0} v^{II}$ können wir ferner auch jeden beliebigen Punkt zur episkopischen Betrachtungsweise wählen. — Bei jeder Veränderung des Blickpunktes wird die Täuschungsfigur verändert; die Täuschung selbst bleibt im Wesentlichen unverändert. Wählen wir den Mittelpunkt v^{0} als Blickpunkt, dann sind die Täuschungsbedingungen gleichmäfsig und symmetrisch auf beide Seiten vertheilt; wählen wir den Punkt v^{I}, dann kommen wir damit auf unsere früher für zulässig erklärte Vereinfachung zurück; es wird dann die zu v^{I} gehörige linke Seite der Figur correct (vertical) erscheinen: die beiden sich kreuzenden Linien A und a werden in eine einzige verticale Linie zusammenfallen. Die Täuschungsmomente liegen nun sämmtlich auf der anderen Seite und treten hier in doppelter Stärke auf.

Das kleine Dreieck $\beta^{I} \beta^{II} \beta^{III}$ ist gleichsam der Regulator der ganzen Täuschung. Mit seiner Gröfsenveränderung verändert sich proportional auch die Stärke der Täuschung; mit seinem Verschwinden verschwindet die Täuschung. — So lange die Blickrichtung sich in ein und demselben verticalen Meridian bewegt, verändert das kleine Dreieck nur seine Gröfse, nicht seine Form: die drei Winkel bleiben nahezu unverändert; nur die Längen der drei Seiten verändern sich gleichzeitig und in gleichem Verhältnifs. Bewegt sich die Blickrichtung nach links oder nach rechts in eine andere Meridianlage, dann wird der nach oben offene Winkel $(\beta^{II} \beta^{III} \beta^{I})$, des kleinen Dreiecks sich entsprechend ver-

kleinern und auf der anderen Seite vergröfsern; so jedoch, dafs die S u m m e beider Winkelveränderungen immer gleich grofs bleibt.

Die Dreieckseite $\beta^{II}\beta^{III}$ giebt für jeden Zeitmoment episkopischer Betrachtung das Maafs der jedesmaligen scheinbaren Ablenkung, mithin auch das M a a f s f ü r d i e S t ä r k e d e r T ä u s c h u n g.

Lassen wir unseren Blick auf der rechten Seite, von v^{II} allmählich höher hinauf bis β^{III} wandern, dann verkleinert sich das imaginäre Dreieck mehr und mehr, um zuletzt in einen einzigen Punkt zu verschmelzen. H i e r ist dann Alles in bester täuschungslosester Ordnung. Blicken wir aber von hier aus wieder zurück auf den tieferliegenden Punkt der anderen Seite (das müssen wir ja thun, wenn überhaupt von einer V e r g l e i c h u n g der Lage zweier Punkte die Rede sein soll) dann findet sich h i e r wieder die täuschende Verschiebung, und ähnlich verhält es sich mit allen anderen nachbarlichen Punkten, auf welche der Blick jeweilig hinzielt.

Wenn nun, in Folge der pseudoparallelen Ablenkung, der Treffpunkt der gegebenen Schräglinie um die Entfernung $\beta^{II}\beta^{III}$ höher zu liegen scheint als er in Wirklichkeit liegt, dann wird man sich nicht weit von der Wahrheit entfernen, wenn man annimmt, dafs ein anderer Punkt, der um ebensoviel tiefer liegt als jener höher zu liegen scheint, gerade da zu liegen scheinen wird, wo der Treffpunkt der Schräglinie in Wirklichkeit liegt.

Die in Figur 5 vereinigten drei Figuren sollen diese Verhältnisse besser veranschaulichen.



Fig. 5.

Die nach links liegende Figur zeigt (in starker Uebertreibung) die constructionsmäfsig ermittelte Verschiebung

der rechten Hälfte der Schräglinie; die mittlere Figur zeigt ihre natürliche Lage mit der damit verbundenen optischen Täuschung und die rechtsliegende Figur zeigt die soeben erwähnte Correction, wobei von einer noniusartigen Verschiebung nichts mehr zu bemerken ist.

Fig. 6.

Die in Figur 6 zusammengestellten drei Halbfiguren sollen den Vorgang bei Veränderung der Blickrichtung noch etwas deutlicher veranschaulichen. Die linkerseits stehende Halbfigur und ihre Buchstabenbezeichnung ist bekannt; nur haben wir hier noch eine Parallele zur Linie *B*, als Hülfslinie $b^0\beta^1$, hinzugefügt. — Der Blickpunkt befinde sich irgendwo unten in der Nähe von *v* und rücke von hier aus allmählich höher hinauf bis β^{III}. Bei dieser Fortbewegung des Blickpunktes nach oben wird die Linie *b* immer näher an *B* heranrücken und wird schliefslich mit *B* zusammenfallen, wobei das kleine Dreieck $\beta^{I}\beta^{II}\beta^{III}$ gleichsam zusammen- und in die Linie *B* hinein-gedrückt wird. Der Punkt β^1 wird aber nicht — wie es in der mittleren (Uebergangs-)Figur gezeichnet ist — in gleicher Entfernung von β^{III} bleiben; β^{II} wird vielmehr, gleichzeitig mit Abnahme der Gröfse des kleinen Dreiecks, immer näher an β^{III}, und β^1 immer näher an β^{II} heranrücken, bis endlich, gleichzeitig mit dem Verschwinden des Dreiecks, alle drei β — wie es die rechtsseitige Figur zeigt — in einen einzigen Punkt zusammentreffen. Dabei rückt die kleine Hülfslinie $b^0\beta^1$ zuerst immer näher an *B* heran, und gelangt

zuletzt an deren andere (linke) Seite; ihr unterer Endpunkt β^{I} rückt ebenmäfsig immer näher an β^{III} heran, und verschmilzt zuletzt in dem gemeinsamen Schmelzpunkt des früheren Dreiecks $(\beta^{I}\beta^{II}\beta^{III})$.

Dieser an der Innenseite der Linie *B* scheinbar sich anlehnende Winkel (ε) ist, allem Anschein nach, dasjenige was die scheinbare Convergenz paralleler Verticallinien bewirkt, wenn — wie im nächsten Abschnitte näher erläutert werden soll — die Aufsenseiten der Parallellinien mit einem oder mit mehreren nach oben offenen spitzen Winkeln armirt werden. Für sich allein betrachtet wäre dieser kleine Winkel der Index des Convergenzgrades, welchen vertical stehende Linien annehmen müssen, wenn sie parallel — nicht sein, sondern — erscheinen sollen.

Wir müssen hier nochmals daran erinnern, dafs unsere Figuren nur dazu dienen sollen, den Vorgang besser zu veranschaulichen; von geometrischer Exactheit kann dabei nicht die Rede sein. In Wirklichkeit fallen Linien und Punkte überhaupt niemals vollständig zusammen; sie kommen sich nur aufserordentlich nahe — so nahe, dafs ihre Abstände und ihr Nochgetrennt-sein gar nicht mehr unterschieden werden kann; sie trennen sich aber, bei veränderter Blickrichtung, dann doch gelegentlich wieder so weit, dafs sie zu geometrisch-optischen Täuschungen Veranlassung geben.

Weitere Schlufsfolgerungen und Beobachtungen.

Wenn ein nach oben offener Winkel (in unseren Figuren meistens an der rechten Seite liegend) gröfser erscheint als er ist, dann mufs sein freier Schenkel entweder weiter nach rechts, oder es mufs die verticale Hauptlinie, in welcher der andere Schenkel liegt, oben weiter nach links gewendet scheinen, oder es mufs die scheinbare Vergröfserung auf beide Schenkel vertheilt sein.

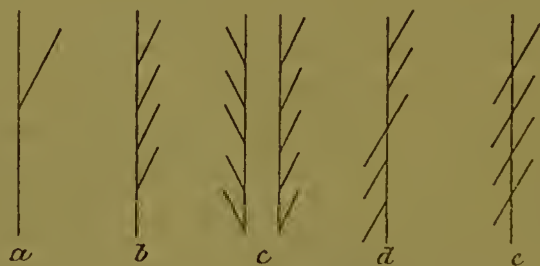
Hier stehen wir vor einer schwer zu lösenden Frage! — Offenbar — wie wir sogleich sehen werden — bleibt die schräge Durchkreuzungslinie im Vortheil; sie ist die stärkere, sie drängt, bei nach oben geöffnetem Winkel, die Schein-Parallele zunächst

weiter nach links, und verleiht ihr schliefslich den trügerischen Schein der Convergenz!

Fassen wir die Frage zunächst so einfach wie möglich.

Wir theilen in dieser Absicht unsere Täuschungsfigur ((Fig. 1) in verticaler Richtung in zwei gleiche Hälften und betrachten die eine Hälfte derselben — ohne Rücksicht auf ihre andere Hälfte — als eine für sich bestehende Figur. Wir haben alsdann nur eine einfache, vertical stehende Linie, die von einer anderen geraden Linie in schräger Richtung getroffen wird (Figur 7 a). — Es entsteht nun die Frage: kann durch die zweite schräg-einfallende Linie die Richtung der anderen (verticalen) Linie s c h e i n b a r verändert werden?

Man wird diese Frage vorläufig noch mit n e i n beantworten müssen, weil eine solche veränderte Richtung, wenn sie stattfände, aller Wahrscheinlichkeit nach so geringfügig sein müfste, dafs sie u n t e r der Schwelle menschlich-möglicher Beobachtung zurückbleibt.

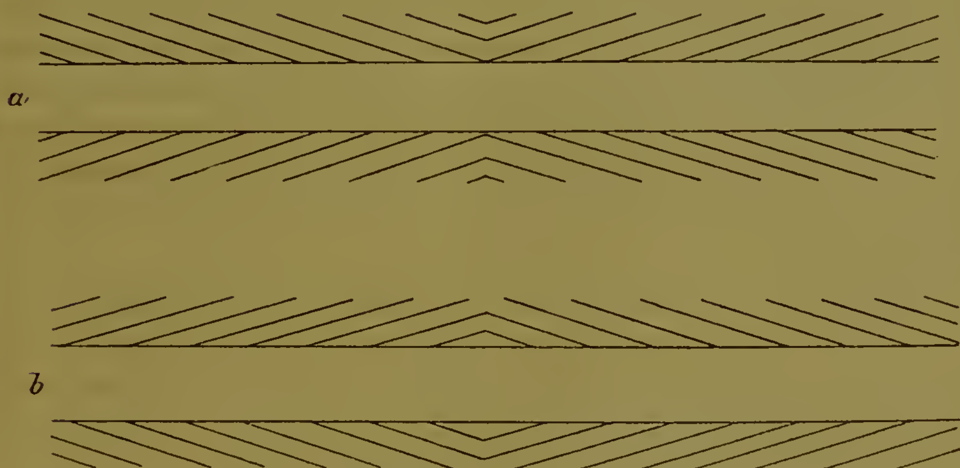


Figur 7 (a bis e).

Legen wir nun an die verticale Hauptlinie eine Mehrzahl, nach oben offener, gleich grofser Winkel, deren freie Schenkel mithin parallel unter sich verlaufen (Fig. 7 b), dann mag vielleicht die Zahl und der Parallelismus bewirken, dafs die verticale Hauptlinie sich nun schon bemerkbar, oben etwas nach links zu neigen scheint.

Verdoppelt man diese täuschende Wirkung dadurch, dafs man auch die andere Hälfte der ursprünglichen Täuschungsfigur, mit gleich grofsen nach oben offenen Winkelschenkeln, in ganz symmetrischer Weise nach a u f s e n hin armirt, und rückt man die beiden Hälften nun in s t r e n g - p a r a l l e l e r Richtung wieder näher an einander (Fig. 7 c.), dann wird noch deutlicher bemerkbar, dafs die beiden w i r k l i c h p a r a l l e l e n Hauptlinien nach oben s c h e i n b a r c o n v e r g i r e n.

Verdoppelt man den bereits erzielten Erfolg nochmals dadurch, daſs man diesen beiden Parallellinien ein ganz ähnliches Paar hinzufügt, bei welchem aber die Oeffnungen der Winkel (umgekehrt) nach entgegengesetzter Richtung gerichtet sind, dann entstehen daraus die beiden wohlbekannten Figuren von Hering.



Figur 8 (a und b).

In einer dieser beiden Figuren (a) scheinen die parallelen Hauptlinien in der Mitte weiter auseinander zu stehen als an ihren Enden, und in der anderen (b), in welcher die sämmtlichen freien Winkelschenkel entgegengesetzte Richtung haben, scheinen beide Parallellinien an ihren Enden weiter auseinander zu stehen als in der Mitte. In beiden Figuren bleibt die Täuschung fast unverändert, wenn man ihnen eine gegen die Horizontalrichtung beliebig veränderte Drehung giebt.

Wir fügen zur Vergleichung hier noch eine, dem Charakter und dem Effect nach sehr ähnliche, ältere Figur (1854/55) von Oppel hinzu, bei der die Verschiedenheit der vier Richtungen, nur durch je eine schräge Linie repräsentirt wird. (Fig. 9.)

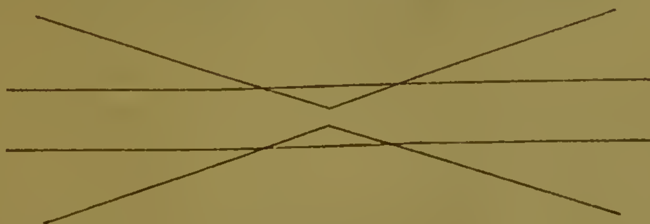


Fig. 9.

Auch in dieser Figur scheinen die zwischen den Schenkeln der beiden stumpfen Winkeln befindlichen Theile der Parallellinien, sich etwas auszuweiten.

Verändert man die Figur in anderer Weise, indem man die obere Hälfte der verticalen Linie an einer Seite mit nach oben, die untere Hälfte an der anderen Seite mit nach unten offenen Winkeln armirt, dann wird scheinbar die obere Hälfte der verticalen Linie, oben eben so sehr nach links, wie die untere Hälfte unten nach rechts gedrängt. Kehrt man die Figur um, dann bleibt ihre Gestalt völlig unverändert; immer drängen die freien Winkelschenkel die verticale Linie, welcher sie anliegen, in die ihrer eigenen Lage entgegengesetzte Richtung. (Fig. 7 d.)

Verändern wir endlich dieselbe Figur in solcher Weise, dafs die verticale Linie durchkreuzt wird von schrägen Linien, deren gleich grofse Winkel auf einer Seite nach oben, auf der anderen Seite nach unten sich öffnen (Fig. 7 e.), dann ist das scheinbare Resultat ungefähr dasselbe wie bei Figur 7 d.

Ohne eine neue Figur hinzuzufügen, wollen wir hier noch bemerken, dafs die über einander gestellten schrägen Durchkreuzungslinien, auch ohne die durchkreuzte verticale Linie, sich (in unserer Figur) scheinbar nach links hinüber neigen würden.

Die merkwürdigste und zugleich bekannteste aller Täuschungsfiguren ist die Zöllner'sche Figur, welche Zöllner — wie er selbst erzählt — zufällig an einem für Zeugdruck bestimmten Muster zuerst bemerkt hat. — Diese Figur macht einen unglaublich unruhigen Eindruck, der sich noch erheblich steigert, wenn man — wie Helmholtz angegeben hat — die Spitze einer Nadel unverwandt fixirt und sie zugleich nahe an dieser Täuschungsfigur vorüberführt. Die einzelnen Bestandtheile derselben gerathen dabei in die seltsamsten Scheinbewegungen. Die verticalen Linien verschieben sich abwechselnd nach oben und nach unten; sie nähern sich mit ihren Endpunkten einander und entfernen sich wieder von einander und machen scheinbar zuweilen sogar förmlich schlangenartige Bewegungen.

An dieser merkwürdigen Figur hat Poggendorff zuerst die „noniusartige Verschiebung“ bemerkt.

Die Zöllner'sche Täuschungsfigur ist im Wesentlichen nur ein nach entgegengesetzten Richtungen mehrfach zusammengesetztes Compositum der bisher besprochenen einfacheren Figuren.

Da sie überdies sich in den meisten Hand- und Lehrbüchern der physiologischen Optik abgebildet vorfindet, so verzichten wir auf nochmalige zeichnerische Reproduction, und beschränken uns auf eine kurze Beschreibung derselben. — Die Figur besteht aus 7 ziemlich dicken verticalen Parallellinien, deren jede von etwa 20 kurzen und gleichfalls ziemlich dicken, schrägen Querstrichen durchschnitten wird (wie Fig. 7e.). Die schrägen Querstriche laufen abwechselnd in einer und in entgegengesetzter Richtung (die spitzen Winkel öffnen sich an einer Verticallinie: rechts nach oben, links nach unten, und an der Nachbarlinie links nach oben, rechts nach unten), so dafs die langen Verticallinien, abwechselnd sich oben zu nähern und unten von einander sich zu entfernen scheinen, und umgekehrt. Das Verwirrende dieser Figur entsteht hauptsächlich dadurch, dafs e i n e M e h r z a h l derartiger Parallellinien mit scheinbar einander entgegengesetzter Neigung neben einander gestellt ist.

Zöllner bemerkt zu dieser Figur, dafs die Stärke der Täuschung ein Maximum erreicht, wenn die Richtung der Hauptstreifen mit der Verbindungslinie beider Augen sich unter einem Winkel von 45° schneiden.

Helmholtz versichert, er könne bei der Zöllner'schen Figur die Täuschung beseitigen, wenn er sie fest fixire und nicht die schwarzen Streifen als Objecte betrachte, die auf weifsem Grunde liegen, sondern die weifsen Streifen, die auf schwarzem Grunde liegen, aufzufassen suche. Sobald ihm dieses gelinge sehe er Alles richtig. So wie er dann aber anfange, den Blick über die Zeichnung hinzubewegen, sei die Täuschung in voller Stärke wieder da.

Auch die „verschobene Schachbrettfigur" (Fig. 10.) von Münsterberg führt sich leicht auf die hier besprochenen Grund-

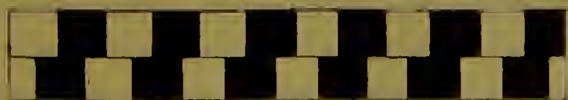


Fig. 10.

principien zurück. Münsterberg versuchte die Täuschung durch Irradiation zu erklären. Wir wollen ihm hierin nicht widersprechen, insofern die Irradiation dazu beitragen kann, die geraden Linien und die scharfen Spitzen etwas abzurunden. Dann

aber verwandeln sich zwei an einander verschobene Vierecke in unregelmäfsig geformte, dicke, schräggestellte Striche, ähnlich denen der Zöllner'schen Hauptfigur. — Auch die Richtung der scheinbaren Ablenkung entspricht ganz dem, was früher hierüber gesagt worden ist.

Verhalten der Täuschung bei Umdrehung der ganzen Figur und bei Schräglage der Parallelen.

Wir haben uns nun noch mit Veränderung von Lage und Stellung unserer ursprünglichen Täuschungsfigur (Fig. 1) — bei unveränderter Blickrichtung — etwas eingehender zu beschäftigen.

Zuerst mag bemerkt werden, dafs die Stärke der Täuschung abnimmt, wenn man die Figur ein wenig nach rechts, und dafs sie zunimmt, wenn man sie ein wenig nach links verschiebt, vorausgesetzt, dafs der Schrägstrich (wie in unserer Figur) von oben rechts nach unten links verläuft. Verläuft er in entgegengesetzter Richtung, dann tritt beim Verschieben auch entgegengesetztes Verhalten auf.

Auch beim Verschieben nach oben oder nach unten, wie überhaupt auch bei verschiedener Schräglage der Ebene, in der sich die Figur befindet, treten bemerkenswerthe Unterschiede in der Stärke der Täuschung hervor, auf die wir indessen nicht näher eingehen wollen. Wir wollen hier zunächst nur die Umdrehung der ganzen Figur bei unveränderter Blicklinie in Betrachtung ziehen.

Wenn man die Figur 1 um ihre Mitte rotirt, wobei jedoch immer vorausgesetzt wird, dafs die Ebene, in der die Figur gedreht wird, mit der Gesichtsfläche des Beobachters ungefähr parallel bleibt, dann ist zunächst auffallend, dafs die Täuschung vollständig verschwindet, sobald die schräge Durchschneidungslinie beim Umdrehen in verticale oder in horizontale Richtung zum Beobachter gelangt.

Gehen wir von der verticalen Stellung des Schrägstriches aus, in welcher keine Täuschung zu bemerken ist, und lassen wir die Figur sich von oben nach rechts um ihre Mitte drehen, dann bemerkt man eine allmählige Zunahme der Täuschung bis etwa 45°. Alsdann nimmt die Täuschung wieder ab, um bei

90^0 d. h. in ihrer horizontalen Lage wieder ganz zu verschwinden. Auf diesem Wege von 0^0 bis 90^0 scheint die obere Hälfte der schrägen Linie stets über die andere Hälfte hinwegzugehen. Von nun an ändert sich die Erscheinung insofern, als die obere Hälfte zur unteren Hälfte wird, und nun rechts an der anderen Hälfte vorbeizugehen scheint. Im Uebrigen wiederholt sich in diesem zweiten Quadranten die Steigerung der Stärke der Täuschung bis ungefähr 135^0, um dann, stetig abnehmend, bei 180^0 sich wieder ganz zu verlieren. Weiter brauchen wir diese Drehungserscheinung nicht zu verfolgen, weil weiterhin im linken unteren Quadranten dieselben Erscheinungen, die wir mit dem Beginn der Drehung von oben nach rechts soeben kennen gelernt haben, sich hier wiederholen. Ebenso bedarf es kaum einer besonderen Erwähnung, dafs, wenn der Schrägstrich von oben-links nach unten-rechts verläuft und wenn nun, in umgekehrter Ordnung, die Figur von oben nach links gedreht wird, die obere Hälfte der Schräglinie im oberen linken Quadranten über die untere hinwegzugehen, und im unteren linken Quadranten links an ihr vorüber zu gehen scheint.

Verhalten der Täuschung bei Schrägstellung der Parallelen. — Zur Beantwortung dieser Frage finden wir in der von Volkmann (l. c. pag. 212) mitgetheilten:

> „Tabelle über die Abweichung der Trennungslinien von den correspondenten Meridianen“

reichliches Material.

In seiner Tabelle unterscheidet Volkmann die Lage des „Meridians“ von der correspondirenden Lage der „Trennungslinie“ und läfst nun den Meridian — der durch den „constanten Diameter“ bezeichnet wird — von 15 zu 15^0 in die Schräglage übergehen, so dafs dieselbe bei 90^0 zur Horizontallage wird, und bei 180^0 wieder in die Nullstellung zurückkehrt.

Die „Trennungslinie“ ist die jedesmalige Linie scheinbarer Abweichung von der Lage des Meridians; die Abweichung selbst wird — wie früher schon gesagt wurde — „Kreuzungswinkel“ genannt.

Das allgemeine Resultat dieser Versuche wird von Volkmann mit folgenden Worten zusammengefafst:

> „Die Trennungslinien coïncidiren nirgends mit den correspondenten Meridianen der Normalstellung des Auges. Die Winkel, unter

welchen beide sich kreuzen, nehmen vom verticalen Meridiane nach dem horizontalen Meridiane stetig ab und vom horizontalen Meridiane weiter gegen den verticalen Meridian unablässig zu."

Die beiden Diameter, welche parallel gestellt werden sollen, divergiren also nicht blos in senkrechter Stellung, sondern auch in jeder Schräglage woraus weiterhin zu schliefsen ist, dafs in jeder Schräglage auch die noniusartige Verschiebung — wenn auch vielleicht mit ungleicher Stärke — hervortreten mufs. Besondere Schwierigkeiten veranlafste nur die horizontale Lage, die, auf verschiedene Weise geprüft, bei Volkmann immerhin noch einen niedrigsten Kreuzungswinkel, im Mittel = 0,43° ergeben hat.

Durch diesen, allerdings sehr kleinen Kreuzungswinkel erklärt sich das Auftreten der noniusartigen Täuschung auch bei horizontaler Lage des parallelseitigen Zwischenraumes.

Helmholtz bemerkt hierzu, dafs er an den eigenen Augen keine merkliche Abweichung vom Netzhauthorizonte finde wenn seine Augen zuvor in paralleler Stellung sich erhalten hatten; nach vorausgegangener convergenter Stellung fand er dagegen eine kleine Abweichung im Sinne Volkmann's. — Diese Bemerkung ist insofern von besonderer Wichtigkeit, weil sie die Abhängigkeit der Täuschung von gewissen Vorbedingungen erkennen läfst, worüber — unseres Wissens — anderweitige Beobachtungen bisher noch nicht vorliegen.

Aus Volkmann's Untersuchungen hat sich weiterhin ergeben, dafs es nicht gleichgültig ist, ob man mit einer linksliegenden Gröfse eine rechtsliegende vergleicht, oder umgekehrt. Volkmann hat deshalb die „Raumlage" (d. i. die Lage des „constanten Diameters") berücksichtigt; er hat den constanten Diameter, nach welchem die Lage des beweglichen Diameters durch den Beobachter geregelt werden soll, in jeder Versuchsreihe 30 mal links (in linke Raumlage) und 30 mal rechts (in rechte Raumlage) gebracht: „Man wird nämlich finden" — so begründet Volkmann dieses Verfahren — „dafs in solchen Versuchsreihen, in welchen die Schwankungen der einzelnen Beobachtungen sehr gering sind, die bei der einen oder anderen Raumlage erhaltenen Mittelwerthe sehr verschieden ausfallen können. Kurz die Raumlage wird zur Ursache constanter Fehler, welche sich nur dadurch eliminiren lassen, dafs man von dem in beiden Raum-

lagen gewonnenen Mittelwerthen der Kreuzungswinkel die halbe Summe nimmt."

Bei sämmtlichen Versuchen unter Schrägstellung des constanten Diameters, ergiebt sich bei linker Raumlage ein Mittelwerth (aus 30 Beobachtungen), welcher zu klein und bei rechter Raumlage ein Mittelwerth (aus 30 Beobachtungen), welcher zu grofs ist. Die halbe Summe beider Beobachtungsreihen wird von Volkmann als „Mittelwerth der Kreuzungswinkel" in die Tabelle eingetragen.

Wir glauben nicht zu irren, wenn wir annehmen, dafs bei diesen Versuchen bei linker Raumlage stets das linke, bei rechter Raumlage stets das rechte Auge maafsgebend gewesen ist.

Da nun bei lothrechtem Stande des constanten Diameter und bei linker Raumlage, als Mittelwerth 2,23°; bei rechter Raumlage, als Mittelwerth 2,06 angegeben wird, so haben wir in nachstehender Tabelle nicht die halbe Summe (= 2,145°),

Tabelle I.

Linker Quadrant							
Oberer				Unterer			
Winkel	Differenz		Divergenz-Winkel	Winkel	Differenz		Divergenz-Winkel
	—	+			—	+	
0°	2,23°	2,06°	4,29°				
15°	2,02	2,07	4,09	165°	1,94	1,93	3,87
30°	2,253	1,263	3,516	150°	1,88	1,73	3,61
45°	1,45	1,62	3,07	135°	1,50	1,48	2,98
60°	0,98	1,43	2,41	120°	0,12	1,07	1,19
75°	0,95	0,97	1,92	105°	0,65	0,65	1,30
90°	{ 0,443	0,553	0,996				
	{ 0,397	0,467	0,864				

als „Mittelwerth der Kreuzungswinkel", sondern die ganze Summe, als Divergenzwinkel (2ε = 4,29°) zweier an-

scheinend paralleler, oder parallel-sein-sollender Linien, in unsere Tabelle I aufgenommen.

Der aus den VOLKMANN'schen Beobachtungen leicht zu berechnenden Divergenzwinkel nimmt im oberen linken Quadranten von 0° bis 90° fast arithmetisch genau für je 3 Winkelgrade der Schrägstellung um 0,1° = 6 Minuten, oder für je 15 Winkelgrade um 0,5 = 30 Minuten ab. Im unteren linken Quadranten sind die Divergenzwinkel im Allgemeinen kleiner und wachsen nicht in ebenso regelmäfsiger Proportion wie im oberen Quadranten.

Vergleicht man die von VOLKMANN berechneten „Mittelwerthe der Kreuzungswinkel“, dann findet man, wie die nachfolgende Tabelle II zeigt, eine ziemlich gleichmäfsige Abnahme der Werthe im oberen Quadranten (von 0° bis 90°) und Wiederzunahme im unteren Quadranten (von 90° bis 180°) und findet, dafs die Vergleichung der Mittelwerthe beider Quadranten — mit einer einzigen Ausnahme — im oberen Quadranten die gröfseren Werthe zeigt.

Tabelle II.

linker Quadrant				Differenz der Mittelwerthe	
Oberer		Unterer			
Grad der Schräglage	Mittelwerth der Kreuzungswinkel	Grad der Schräglage	Mittelwerth der Kreuzungswinkel	+	—
15°	2,05	165°	1,94	0,11	
30°	1,75	150°	1,80		0,05
45°	1,53	135°	1,49	0,04	
60°	1,20	120°	1,10	0,10	
75°	0,96	105°	0,65	0,31	
90°	0,43	90°	0,43	0,00	

Legen wir die in diesen beiden Tabellen numerisch angegebenen Werthe zu Grunde, dann können wir für jeden nach oben offenen spitzen Winkel den Werth von ε daraus berechnen. —

In Tabelle I ist angegeben, dafs für den Winkel $\alpha = 0$ der Divergenzwinkel $(2\varepsilon) = 4{,}29^{0}$ sei; demnach wäre $\varepsilon = 2{,}145^{0}$, oder sagen wir — der Kürze wegen — $\varepsilon = 2^{0}$.

Nun haben wir aus ebenderselben Tabelle schon ersehen, dafs die experimentell ermittelten Zahlen, ziemlich genau, ein arithmetisches Verhältnifs von 3 zu 0,1 erkennen lassen. Aus diesen Verhältnifszahlen — wenn man sie als annähernd richtig gelten lassen will — kann man für jeden in Winkelgraden angegebenen Winkel α, die Gröfse seines scheinbaren Zuwachses durch den variablen kleinen Winkel ε berechnen.

Es sei beispielsweise ein Winkel $= 36^{0}$ gegeben, dann würde, dem Verhältnifs von 3 zu 0,1 entsprechend, das dazugehörige $\varepsilon = 1{,}2$ sein. Dieses ε haben wir von dem für den Nullwinkel experimentell ermittelten $\varepsilon = 2$ zu subtrahiren und dem Winkel 36^{0} hinzuzurechnen, um dessen s c h e i n b a r e G r ö f s e zu finden. Das Ergebnifs wäre in diesem Falle $= 36^{0}$ 48 Minuten.

Für die von uns gewählte abgerundete Zahl $(\varepsilon = 2)$ würde sich weiterhin ergeben, dafs das variable $\varepsilon = 0$ wird, wenn der Winkel $\alpha = 60^{0}$ ist, das heifst also mit anderen Worten, dafs der nach oben offene spitze Winkel von 60^{0} weder gröfser noch kleiner, sondern in seiner richtigen täuschungslosen Gröfse gesehen wird. Danach müfste angenommen werden, dafs noch gröfsere spitze Winkel, von 60^{0} bis 90^{0} kleiner erscheinen, als sie sind, weil ε alsdann negativ werden würde. — Halten wir uns strenger an die (nicht abgerundete) experimentell gefundene Zahl, dann würde erst bei einem Winkel $= 75^{0}$ das variable $\varepsilon = 0{,}02$, mithin nahezu $= 0$ werden. — Indessen bleibt hierbei zu bedenken, dafs das empirisch gefundene Verhältnifs von 3 zu 0,1, nur a n n ä h e r n d als richtig gelten kann, und andererseits, dafs die als Mittelwerthe aus je 30 Beobachtungen von VOLKMANN gefundenen Zahlen, in der zweiten Decimalstelle nur zweifelhaften Werth haben, und endlich, dafs ein solches Verhalten (wonach $\varepsilon = 0$ wird, bevor der gegebene Winkel den Werth von 90^{0} erreicht hat) einer besseren Begründung bedarf, als bis jetzt dafür geltend gemacht werden kann.

Bei dem Zahlenergebnifs im linken unteren Quadranten ist noch zu bemerken, dafs zwar die Zahlen in ähnlichem Verhältnifs wie sie von 0^{0} bis 90^{0} abgenommen hatten, nun, von 90^{0} bis 180^{0} wieder zunehmen, allein die correspondirenden Schräg

heitsgrade (15° und 165°, oder 30° und 150° u. s. w.) sind im unteren Quadranten — mit einer einzigen Ausnahme — kleiner als im oberen und wachsen nicht ebenso gleichmäſsig wie in diesem.

Da bei der sinnreichen Versuchsvorrichtung VOLKMANN's nur mit Diametern und nicht mit Halbmessern experimentirt worden ist, so muſs das Ergebniſs des linken unteren Quadranten als identisch mit dem rechten oberen betrachtet werden. — A priori möchte man aber annehmen, daſs, wenn jeder der vier Quadranten für sich geprüft worden wäre [1], die beiden oberen Quadranten vielleicht besser mit einander übereinstimmende Zahlen ergeben haben würden als der linke obere mit dem linken unteren, und daſs der rechte untere Quadrant vielleicht auch Resultate ergeben haben würde, die mit dem linken unteren besser übereinstimmen als mit dem linken, resp. rechten oberen. Jedenfalls bleibt zu wünschen, daſs diese mühsamen Versuche auch noch auf die rechte Hälfte des Kreises ausgedehnt werden.

Wir würden übrigens erwarten, daſs bei solchen Untersuchungen vorwiegend nur persönliche Unterschiede hervortreten, weil, bei den meisten Menschen, eine mehr oder weniger deutliche Verschiedenheit der beiden Augen sich nachweisen läſst.

Das Gröſser-Erscheinen spitzer Winkel.

Die meisten Menschen sind wohl im Stande, eine gerade Linie, einen rechten Winkel oder den parallelen Verlauf zweier gerader Linien ziemlich genau abzuschätzen; dagegen ist nicht Jedermann im Stande, die Gröſse eines bestimmten nicht-rechten Winkels nach bloſsem Augenmaſs richtig anzugeben oder nachzuzeichnen. Der Grund davon liegt ohne Zweifel darin, daſs wir täglich und stündlich Gelegenheit haben — ja genöthigt sind — mit horizontalen und verticalen Richtungen — also mit rechten Winkeln — fast nie aber mit irgend einem bestimmten, vom rechten verschiedenen, Winkel uns anhaltend zu beschäftigen. Es fehlt für diesen letzteren Fall an jeglicher Uebung, die uns

[1] Bei anderer Gelegenheit hat VOLKMANN allerdings auch mit Halbmessern (Radien) experimentirt.

im ersten Falle so reichlich zu Gebote steht. Hätten wir gleich-günstige Gelegenheit, uns im Abschätzen der Gröfse eines rechten und eines nicht-rechten Winkels von bestimmter Gröfse (z. B. von 30°) zu üben, dann ist nicht abzusehen, warum wir nicht den einen mit ebenso grofser Sicherheit wie den anderen sollten abschätzen lernen.

Wenn wir zu einer gegebenen Geraden, genau parallel, eine zweite Gerade ziehen wollen, dann vermerken wir an dem einen Ende derselben die Entfernung, in der die Parallele gezogen werden soll, und schätzen am anderen Ende derselben die gleiche Entfernung ab. Zu gröfserer Sicherheit und zur besseren Controle blicken wir wohl noch einmal auf den ersten Endpunkt zurück, und wohl auch noch auf andere Punkte der gegebenen Linie, um uns sicher davon zu überzeugen, dafs die zu ziehende Parallele an allen Punkten wirklich gleich weit von der gegebenen Linie absteht. Ist unser Gedächtnifs stark genug, um die Gröfse dieser Distanz, von einem Moment bis zum anderen, genau festhalten zu können, dann wird die Parallellinie tadellos ausfallen; im anderen Falle entstehen Ungenauigkeiten.

Durch fortgesetzte Uebung erlangen wir freilich eine gewisse Fertigkeit, die uns schliefslich befähigt, gleichsam mit einem Blick zu entscheiden, ob zwei Linien parallel sind — ob z. B. ein an der Wand hängendes Bild „vollkommen gerade" hängt — oder nicht. Diese Fertigkeit ruht aber immer auf demselben eben angegebenen umständlichen Verfahren, auf welches wir in allen zweifelhaften und schwierigeren Fällen doch immer wieder zurückgreifen müssen. Unwillkürlich — sei es bewufst oder unbewufst — wird man aufserdem noch alle zufällig sich etwa darbietenden Nebenumstände mitbenutzen, um sich ein richtiges Urtheil zu sichern. — Eine besondere angeborene instinctive Fähigkeit zu solcher Unterscheidung giebt es nicht; wohl aber mag es dem Einen leichter werden als dem Anderen, durch stärkere Concentration der eigenen Aufmerksamkeit, gröfsere Geschicklichkeit hierin zu erlangen.

Weit schwieriger als die Bestimmung des Parallelismus zweier geraden Linien ist die Beurtheilung und richtige Abschätzung der Oeffnungsweite eines nicht-rechten Winkels. Beim Parallelismus war nur eine Gröfse, nämlich die Entfernung der beiden Linien von einander, scharf ins Auge zu fassen und dem Gedächtnisse, so lange wie nöthig, gut einzuprägen. Bei Bestimmung

der Oeffnungsweite eines nicht-rechten Winkels haben wir mehr als einer Gröfse Rechnung zu tragen. Man wird in Gedanken zuerst den Winkel zum Dreieck ergänzen, und dann alle erforderlichen Congruenzbedingungen wenigstens so lange im Gedächtnisse festhalten müssen, bis man davon Gebrauch machen will.

Anders wird es kaum möglich sein, ein leidlich zutreffendes Schätzungsmaafs einer Winkelgröfse zu gewinnen. Allerdings wird auch in diesem Falle, durch lange Uebung und scharfe Aufmerksamkeit, gröfsere Sicherheit und Schnelligkeit des Urtheils erzielt werden können; daran ist nicht zu zweifeln. Angesichts der gröfseren Schwierigkeiten glauben wir aber annehmen zu müssen, dafs die Beurtheilung der Verschiedenheit von Winkelgröfsen nach Augenmaafs, im Allgemeinen auf grofse Zuverlässigkeit nur ausnahmsweise Anspruch machen darf.

Es kommt erschwerend noch die Gewöhnung an perspectivische Täuschung hinzu, die uns jeden Winkel in einer ganz anderen Gröfse erscheinen lassen kann, als diejenige, welche er in der Ebene des Papieres wirklich besitzt. — Die „umkehrbare Täuschungsfigur“ des Necker'schen Würfels besteht z. B. aus geraden Linien, die sich unter ebenen Winkelöffnungen von 20° und 120° einander begegnen, und doch mufs man sämmtliche Winkel dieser Figur perspectivisch für rechte Winkel halten; man wird vielleicht sogar einige Mühe haben sich klar zu machen, dafs an der ganzen Figur nicht ein einziger Winkel von 90° zu sehen ist.

Blicken wir nun wieder auf unsere nach oben scheinbar divergirende Parallellinien zurück, so ist klar, dafs die scheinbare Divergenz nach oben einen spitzen Winkel nach unten voraussetzt (Divergenzwinkel), der bei wirklich parallelen Linien bekanntlich = 0 sein müfste.

Setzen wir nun einen nach oben offenen spitzen Winkel von beliebiger Gröfse an die Aufsenseite einer nach oben divergirenden Pseudoparallele, dann mufs dieser Winkel, verglichen mit der lothrechten Linie an welche er sich wirklich ansetzt, offenbar gröfser erscheinen als er ist, und zwar genau um so viel gröfser als es der halbe Divergenzwinkel der Pseudoparallelen erfordert. Mit diesem kleinen, dem halben Divergenzwinkel der Pseudoparallelen entsprechenden Gröfsenüberschufs über

den Nullwinkel des wirklichen und wahren Parallelismus beginnt die Beurtheilung der scheinbaren Winkelgröfse jedes, an eine lothrechte Linie angesetzten, nach oben sich öffnenden, spitzen Winkels; um diese kleine Differenz mufs er gröfser erscheinen, als er wirklich ist.

Läfst man diese Annahme vorläufig als richtig gelten, dann wird andererseits doch noch zu fragen sein, ob nicht ebenso folgerichtig auch widersprechende Behauptungen geltend gemacht werden können.

Wenn spitze Winkel allgemeinhin gröfser erscheinen als sie sind, dann müssen die, jeden spitzen Winkel zu zwei Rechten ergänzenden stumpfen Nebenwinkel kleiner erscheinen, als sie sind — darüber besteht keine Meinungsverschiedenheit. — Wie aber, wenn wir den spitzen Winkel mit seinem, ihn zu einem rechten Winkel ergänzenden Complementärwinkel vergleichen? Dieser Complementärwinkel ist ja selbst auch ein spitzer Winkel! — Wenn beide spitze Winkel gröfser erscheinen als sie sind, dann mufs nothwendig auch der rechte Winkel gröfser erscheinen als ein rechter Winkel. Wir dürfen aber — nach Allem was hierüber als anerkannt gilt — annehmen, dafs die Gröfse eines rechten Winkels im Allgemeinen mit einer verhältnifsmäfsig grofsen Genauigkeit richtig eingeschätzt und angegeben werden kann. Ist diese letztere Annahme zutreffend, dann ist nicht wohl möglich, dafs zwei spitze Winkel, die sich gegenseitig zu einem rechten Winkel ergänzen, beide zugleich gröfser erscheinen können als sie wirklich sind. Wenn der eine von beiden gröfser erscheint als er ist, und wenn man nicht bestreitet, dafs ein rechter Winkel verhältnifsmäfsig genau als solcher erkannt werden kann, dann mufs der andere nothwendig kleiner erscheinen als er ist.

Die Erfahrung lehrt — wie wir sogleich sehen werden — dafs es sich wirklich so verhält: von zwei zu einem rechten Winkel sich ergänzenden spitzen Winkeln wird in der Regel der eine für gröfser, der andere für kleiner gehalten als er ist.

Versuchen wir zuvor diese Frage auch in analytischer Form noch etwas besser zu beleuchten, indem wir zuerst ganz allgemeinhin das Verhalten einer einzelnen schrägen Linie näher prüfen.

Im ebenen Raum haben wir nur zwei, jederzeit festbestimmbare Richtungen: die lothrechte Richtung gegen den Mittelpunkt der Erde und die überall gleiche, ebene Oberfläche des Wassers, d. h. also: die *verticale* und die *horizontale* Richtung. — Alles was nicht horizontal und nicht vertical ist, ist *schräg*! — Der *Grad der Schrägheit* einer gegebenen geraden Linie kann nicht anders bestimmt werden als durch das Richtungs-Verhältnifs zu einer horizontalen, oder zu einer verticalen Linie, d. h. durch die Gröfse des, in Folge des Zusammentreffens beider Linien, entstehenden Winkels.

Der Grad der Schrägheit einer Linie, deren Coordinaten an dem einen Endpunkte x und y, an dem anderen — wie wir annehmen wollen *höher* liegenden — Endpunkte x^1 und y^1 heifsen mögen, läfst sich ausdrücken durch die Gleichung:

$$\text{tang.} = \frac{y^1 - y}{x^1 - x}$$

oder, wenn wir den tieferen Endpunkt der schrägen Linie in die verticale (y) Axe verlegen, mithin $x = 0$ setzen, und wenn wir den hieraus entstehenden *nach oben offenen* spitzen Winkel mit dem Buchstaben α bezeichnen:

$$\text{tang. } \alpha = \frac{x^1}{y^1 - y}.$$

Setzen wir nun auch noch $x^1 = 0$, dann wird der Winkel $\alpha = 0$ und die schräge Linie fällt ganz und gar in die y Axe. Wegen der Divergenz der Pseudoparallelen mufs aber der kleine Winkel ε, der bei wirklich parallelen Linien $= 0$ ist, nun noch hinzu addirt werden, um dem Winkel α seine *volle scheinbare Gröfse* zu sichern.

Dieses ε ist nach Volkmann's Untersuchungen — wie wir bereits wissen — eine *variable* Gröfse. Die Gröfse ε nimmt ab wenn α gröfser wird, und zwar in einem Verhältnisse, wonach $\varepsilon = 0$, oder fast $= 0$ wird, wenn α die Gröfse eines rechten Winkels erreicht. Unser spitzer Winkel α soll aber nicht $= 0$ sein; er soll einen beliebigen Werth annehmen, welcher zwischen 0^0 und 90^0 liegt. — Verlegen wir nun den Scheitelpunkt dieses Winkels — indem wir auch $y = 0$ setzen — in den Kreuzungspunkt unserer Coordinaten, dann hat dieser spitze Winkel einen ebenfalls spitzen Winkel als complementären Nach-

barn, der ihn zu einem rechten Winkel ergänzt. Dieser complementäre Winkel mufs also, — nicht blofs theoretisch, sondern factisch und praktisch augenscheinlich kleiner sein, wenn jener erstere gröfser ist, oder gröfser zu sein scheint; es ist nicht möglich, dafs die Summe zweier sichtbarer Gröfsen gröfser oder kleiner sein oder erscheinen kann, als sie in Wirklichkeit ist.

Die Erfahrung lehrt, dafs es sich wirklich so verhält!

Wir haben, um erfahrungsmäfsiges Material zu sammeln, folgendes Verfahren eingeschlagen:

Auf einem, auf ein Zeichenbrett aufgespannten Bogen Papier wurde ein grofses rechtwinkliges Coordinatenkreuz aufgezeichnet, und auf einem Stückchen Pauspapier wurde mit der Reifsfeder eine gerade Linie gezogen. — Die Aufgabe des Beobachters, der möglichst genau der verticalen Mittellinie gegenüber gesetzt wurde, bestand nun darin, bei unveränderter Stellung, jeden der vier um das Coordinatenkreuz gelagerten rechten Winkel durch die auf dem Pauspapier gezeichnete Gerade, nach Augenmaafs, in zwei gleichgrofse halbe Rechte (45^{0}) zu theilen. — Die auf diese Weise getheilten (halbrechten) Winkel wurden dann wieder zu scheinbar ganzrechten Winkeln zusammengelegt und zwar in solcher (veränderten) Weise, dafs die Oeffnung der vier scheinbaren Rechtwinkel nach oben, nach unten, nach rechts und nach links gerichtet war.

Diese Versuche zeigten in einzelnen Fällen zwar grofse Zahlen-Schwankungen und bestätigen damit die Richtigkeit unserer oben ausgesprochenen Ansicht, dafs die Schätzung von Winkelgröfsen nach Augenmaafs aufserordentlich schwierig und unsicher sei.

Soviel sich aus unseren bisherigen nicht sehr zahlreichen Prüfungen entnehmen läfst, ist — in Uebereinstimmung mit den Beobachtungen von Oppel und in Uebereinstimmung mit der angeblichen „Ueberschätzung verticaler Gröfsen" — gefunden worden, dafs der nach oben offene rechte Winkel, fast ohne Ausnahmen, gröfser erscheint als 90^{0}, und dafs der nach unten offene Winkel, gewöhnlich zwar etwas kleiner als der nach oben offene, immerhin jedoch auch noch gröfser erscheint als 90^{0}. Die beiden seitlich sich öffnenden Rechtwinkel erscheinen dagegen durchschnittlich kleiner als 90^{0}.

Wir lassen hier eine kleine numerisch geordnete Uebersichtstabelle (10 Beobachtungen) zweier Beobachter (I und II) nachfolgen, die das Gesagte besser klarlegen soll.

Tabelle A.

I. oben	I. unten	I. rechts	I. links	II. oben	II. unten	II. rechts	II. links
92° 17′	91° 9′	90° 50′	85° 44′	91° 18′	93° 52′	91° 1′	83° 49′
91° 23′	91° 26′	90° 48′	86° 23′	97° 0′	89° 14′	89° 12′	84° 34′
95° 52′	92° 44′	87° 14′	84° 10′	100° 11′	91° 34′	82° 55′	85° 20′
88° 54′	91° 1′	93° 18′	86° 47′	97° 24′	92° 46′	85° 1′	84° 49′
88° 47′	90° 0′	91° 33′	89° 40′	96° 36′	90° 48′	88° 25′	84° 11′

	Mittel aus je 5 Beobachtungen zweier Beobachter		Mittel aus allen 10 Beobachtungen
Oben	91° 26,6′	96° 29,8′	93° 58,2′
Unten	91° 16,0′	91° 38,8′	91° 27,4′
Rechts	90° 44,6′	87° 18,8′	89° 1,7′
Links	86° 32,8′	84° 32,6′	85° 32,7′

Es würde sich, wenn im Verfolg ähnlicher Untersuchungen — woran wir nicht zweifeln — ähnliche Resultate erzielt werden, hieraus ein gesetzmäfsiges Verhalten entnehmen lassen, welches dahin formulirt werden mufs, dafs spitze Winkel, die sich mit einem ihrer Schenkel der verticalen Richtung anschliefsen, irrthümlich leicht für gröfser gehalten werden als sie sind, während ebensolche Winkel, die sich mit einem ihrer Schenkel der horizontalen Richtung anschliefsen, ebenso leicht für kleiner gehalten werden als sie in Wirklichkeit sind.

Eine zweite Reihe ähnlicher Versuche wurde so eingerichtet, dafs die beiden seitlichen Quadranten mit einander vertauscht, dafs also die beiden rechten Quadranten auf die linke, die beiden linken Quadranten auf die rechte Seite verlegt wurden. Der Beobachter wurde — wie bei dem vorigen Versuche — vor die Mitte einer über ein genau rechtwinkliges Papierblatt gezogenen horizontalen Linie gesetzt. — Seine Aufgabe war: die vier rechten Winkel, welche an den Enden der Horizontallinie mit den Papierrändern gebildet werden — nach Augenmaafs — zu halbiren. Bei diesen Versuchen wurden nur die vier, der horizontalen Linie anliegenden, halb-rechten Winkel in Berechnung gezogen.

Das Resultat war überraschend, wenn auch nicht unerwartet. — Die (nicht unerheblichen) Unterschiede von rechts und links lassen wir auf sich beruhen, weil sie, aller Wahrscheinlichkeit nach, auf (nicht näher untersuchte) Verschiedenheiten der beiden Augen zurückzuführen sind. Interessant ist aber der Unterschied von unten und oben, welcher deutlich zeigt, dafs die oberen Werthe durchschnittlich kleiner (also unrichtiger) sind, während die unteren dem richtigen Werth von 45^0 viel näher kommen. Es beruht dies auf denselben Ursachen, welche — wie wir oben gesehen haben — die Täuschung der Poggendorff'schen Figur beim Verschieben nach rechts oder nach links erleidet. Durch die Blickwendung von der Mitte aus, nach rechts oder nach links, gelangt das Auge, dem Winkeltheilungsstriche gegenüber, in eine der Verticalen ziemlich nahe Richtung, in welcher — wie wir wissen — die Täuschung verschwindet.

Wir lassen auch hierüber eine tabellarische Zahlenübersicht einer Versuchsreihe von 10 Beobachtungen nachfolgen.

Tabelle B.

Links		Rechts	
oben	unten	oben	unten
41° 8′	51° 15′	39° 57′	42° 41′
36° 43′	42° 48′	38° 25′	41° 42′
42° 13′	45° 33′	39° 31′	36° 32′
41° 8′	46° 33′	36° 59′	43° 51′
43° 3′	46° 33′	37° 44′	45° 0′
42° 17′	46° 38′	40° 36′	43° 54′
44° 35′	45° 47′	43° 3′	40° 22′
37° 23′	46° 6′	42° 23′	37° 23′
40° 43′	44° 38′	39° 11′	40° 29′
37° 58′	46° 33′	35° 41′	43° 27′
im Mittel:			
40° 43′	46° 14′	39° 21′	41° 32′

oder, je zwei scheinbar halbrechte Winkel nach den vier verschiedenen Richtungen zusammenaddirt:

Oben	80° 4′	Rechts	80° 53′
Unten	87° 46′	Links	86° 57′

Eine dritte Reihe ganz ähnlicher Versuche wurde an einer verticalen Linie vorgenommen, wobei ebenfalls nur die vier der Verticale anliegenden Winkel in Betracht gezogen wurden. Die Resultate dieser dritten Versuchsreihe sind in nebenstehender Tabelle C zusammengestellt.

Wie in der zweiten Reihe das „Rechts“ und „Links“, so ist in dieser dritten Reihe das „Oben“ und „Unten“ vertauscht: der in der ersten Reihe nach unten sich öffnende Winkel liegt nun oben, und der nach oben sich öffnende Winkel liegt unten.

Diese dritte Reihe ist insofern von Interesse als sie — wenn auch nur durch kleine Differenzen — ganz deutlich zu erkennen giebt, dafs das Gröfsenverhältnifs der Winkel sich ebenfalls umgekehrt hat. In der ersten Reihe war der obere Winkel gröfser als der untere; in der dritten Reihe ist der untere gröfser als der obere; in beiden Fällen ist aber die Winkelöffnung nach oben gerichtet; umgekehrt verhält es sich mit den beiden anderen Winkeln.

Tabelle C.

oben	unten
87° 50′	89° 22′
91° 34′	89° 13′
95° 21′	90° 47′
90° 34′	97° 46′
93° 24′	98° 12′
92° 12′	92° 44′
91° 57′	98° 56′
91° 6′	94° 55′
82° 20′	90° 22′
86° 30′	86° 54′
im Mittel:	
90° 17′	92° 51′

Wenn wir die vier in Rede stehenden Winkel in leicht verständlicher Weise ($\overset{o}{\vee}$, $\underset{u}{\wedge}$, $\overset{u}{\vee}$, $\underset{o}{\wedge}$) bezeichnen und wenn wir sie vergleichsweise neben einander stellen, dann ist, in mittleren Zahlen ausgedrückt:

$$\overset{o}{\vee} = 93^{\circ}\ 58{,}2'$$
$$\underset{u}{\wedge} = 91^{\circ}\ 27{,}4'$$
$$\underset{o}{\wedge} = 90^{\circ}\ 17'$$
$$\overset{u}{\vee} = 92^{\circ}\ 51'$$

In allen vier Fällen sind diese vier Winkel grö**ſ**ser als 90°, während in den analogen vier Fällen der ersten und zweiten Versuchsreihe

$$<_{r} = 89^{\circ}\ \ 1{,}7'$$
$$_{l}\!> = 85^{\circ}\ 32{,}7'$$
$$<_{l} = 86^{\circ}\ 57'$$
$$_{r}\!> = 80^{\circ}\ 53'$$

alle vier Winkel ohne Ausnahme kleiner sind als 90°.

Das gesetzmäſsige Verhalten wonach alle spitzen Winkel, deren einer Schenkel in der Horizontalrichtung liegt, kleiner, und alle spitzen Winkel, deren einer Schenkel in der Verticalrichtung liegt, gröſser erscheinen als sie sind, wird demnach durch alle drei Versuchsreihen bestätigt.

Es läfst sich hiernach mit einiger Wahrscheinlichkeit annehmen, dafs Winkel, deren Schenkel weder in der horizontalen noch in der verticalen Richtung liegen, annähernd nach der ihnen nächsten dieser beiden Richtungen, schätzungsweise Beurtheilung finden werden.

Wir haben noch ein anderes Verhalten zu beachten, welches wir vorläufig in folgender Form ausdrücken wollen:

$\vee^{o}$ ist gröfser als $\vee^{u}$ und
$\wedge_{u}$ „ „ „ $\wedge_{o}$

oder, in mittleren Zahlenwerthen ausgedrückt:

$93^{0}\ 58{,}2' > 92^{0}\ 51'$ und
$91^{0}\ 27{,}4' > 90^{0}\ 17'$

und

$<^{r}$ ist gröfser als $>^{r}$ und
$<_{l}$ „ „ „ $>_{l}$

oder, in mittleren Zahlen ausgedrückt:

$89^{0}\ 1{,}7' > 80^{0}\ 53'$.
$86^{0}\ 57' > 85^{0}\ 32{,}7'$.

Dieses letztere Verhalten lassen wir vorläufig unberührt; es bedarf vor allen Dingen zuvor noch einer festeren Begründung des c o n s t a n t e n Vorkommens durch fortgesetzte Untersuchungen an gut geeigneten Versuchspersonen, welche uns selbst, zur Zeit, leider nicht zur Verfügung stehen.

Andere Täuschungsfiguren.

Auf Grund unserer bisherigen Erörterungen glauben wir noch einige andere geometrisch-optische Täuschungen befriedigend erklären, oder — richtiger ausgedrückt — auf gemeinsame Grundgesetze zurückführen zu können.

1. Eine s c h r ä g e L i n i e, deren mittleres Drittheil in einen leeren Zwischenraum verwandelt ist, oder — mit anderen Worten — z w e i von einander getrennte, aber in vollkommen gleicher Schrägrichtung verlaufende Linien können eine Täuschung bewirken, wonach es scheint, als ob die obere Linie, anstatt in ihrer geradlinigen Verlängerung mit der unteren zusammenzufliefsen, ü b e r d i e s e l b e h i n w e g g e h t.

Bezeichnen wir die Coordinaten der vier Endpunkte dieser beiden Linien mit den Buchstaben x und y und versehen wir diese beiden Buchstaben, in ihrer Reihenfolge von unten nach oben, mit entsprechenden Stellenzeigern, dann wird der nach oben offene spitze Schrägheitswinkel (α), welchen diese beiden Linien, hinreichend verlängert, mit der verticalen y-Ordinate einschliefsen, auszudrücken sein durch die Gleichung:



Figur 11.

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{x^{II} - x^{I}}{y^{II} - y^{I}} = \frac{x^{IV} - x^{III}}{y^{IV} - y^{III}}.$$

Wir wissen aber, dafs dem Winkel α noch ein kleiner Winkel (ε) hinzugerechnet werden mufs, wenn die scheinbare Winkelgröfse gesucht wird.

In Folge dieser Veränderung werden x^{I} und x^{III}, sowie auch y^{I} und y^{III} gar nicht, x^{II} und x^{IV} kaum merklich, verändert; nur y^{II} und y^{IV} werden dadurch in Mitleidenschaft gezogen; sie werden kleiner und folglich werden auch die Nenner obiger beiden Brüche kleiner, die Brüche selbst also gröfser. Durch die Verkleinerung der Ordinaten y^{II} und y^{IV} wird aber die Richtung der beiden Linien verändert. Da nun die durch $x^{I} y^{I}$ und $x^{III} y^{III}$ bestimmten beiden (tiefer liegenden) Punkte in ihrer Lage völlig unverändert bleiben, so kann eine durch diese beiden Punkte gelegte gerade Linie nun nicht zugleich auch die beiden anderen, ihrer Lage nach veränderten Endpunkte treffen. Da jedoch die veränderte Winkelstellung bei beiden Linien gleich grofs ist, so mufs auch die veränderte Richtung gleich grofs sein, und einen parallelen Verlauf beider Linien bedingen, und zwar so, dafs die höher liegende Linie die höher liegende bleibt, und also in ihrer Verlängerung über die andere hinwegzuziehen scheint. — Das ist es gerade, was als „optische Täuschung" (als noniusartige Verschiebung) an diesen beiden Linien bemerkt wird.

2. Die soeben besprochene Täuschungsfigur ist im Grunde genommen nur eine Vereinfachung derjenigen Täuschungsfigur von der wir ursprünglich ausgegangen sind (Figur 1). Sie ist insofern vereinfacht, als der leere Zwischenraum von keinerlei

Grenzlinien eingefafst ist. Alles früher hierüber Gesagte mufs demnach Geltung behalten gleichviel in welche Richtung die etwa hinzufügenden Grenzlinien hineingelegt werden, oder überhaupt hineingelegt werden können.

Wir benutzen diese Gelegenheit um noch besonders darauf hinzuweisen, dafs die noniusartige Verschiebung der beiden Linien auch dann Geltung behält und behalten mufs, wenn der leere Zwischenraum durch parallele Horizontallinien begrenzt wird, und möchten im Voraus dem Einwand begegnen, dafs die für vertical nach oben divergirenden Pseudoparallelen geltenden Gesetze nicht auch für horizontale Parallelen volle Geltung behalten sollten.

3. Das Quadrat. Es gilt ziemlich allgemein als eine ausgemachte Thatsache, dafs, bei Vergleichung horizontaler und verticaler Dimensionen, sich ein „constanter Fehler" zeigt, der darin besteht, dafs die verticalen Dimensionen überschätzt werden.

Von zwei gleichgrofsen Dimensionen, von denen die eine horizontal liegt, die andere vertical steht, wird die verticale für gröfser gehalten und demnach kleiner eingeschätzt. Ein von ungeübten Zeichenschülern nach Augenmaafs gezeichnetes Quadrat soll, bei näherer Prüfung, sich gewöhnlich als ein rechteckiges Viereck mit länglicher Basis erweisen.

Wie grofs die Unter- oder Ueberschätzung sei, darüber gehen die betr. Angaben weit auseinander. Oppel[1], der zuerst auf diesen „constanten Fehler" aufmerksam gemacht hat, sagt: „So wird ein rechtwinkliges Viereck von 8 Zoll Höhe auf $8^1/_2$ Zoll Grundlinie willig für ein Quadrat erkannt, während ein wirkliches Quadrat, daneben gehalten, um etwa $^1/_2$ Zoll zu hoch erscheint." — Wundt schätzt die Gröfse dieser „bedeutendsten und zugleich variabelsten Schwankung" auf $^1/_7$ bis $^1/_{20}$, und Helmholtz veranschlagt diesen „constanten Fehler" auf $^1/_{30}$ bis $^1/_{60}$; im Mittel auf $^1/_{40}$. — Wahrscheinlich ist, dafs nach einiger Uebung und bei geschärfter Aufmerksamkeit, der Unterschied noch sehr viel kleiner, wenn nicht ganz verschwindend, gefunden werden würde.

Ein nach unseren Voraussetzungen bei flüchtigem Umherblicken gewonnenes Bild eines Quadrates müfste die Gestalt eines Tra-

[1] *Jahresber. des physikal. Vereins zu Frankfurt a. M.* 1854/55, S. 38.

pezes annehmen, dessen obere Parallelseite ein klein wenig gröfser ist, als die untere und dessen laterale Seiten folglich ein klein wenig schräg nach unten zusammenlaufen und mithin auch etwas länger sein würden, als die lothrechten Seiten eines richtig gezeichneten Quadrates.

Versuchen wir indessen den Ursprung dieser Täuschung noch in anderer Weise klar zu legen.

Wir wollen annehmen, es handle sich darum, einen rechten Winkel in zwei gleiche Winkel zu theilen, wie dies bei den Versuchen des vorhergehenden Abschnittes thatsächlich geschehen ist. Die beiden Schenkel des rechten Winkels sollen mit dem rechtwinkligen Coordinatenkreuz, sein Scheitelpunkt also mit dem Durchschnittspunkt der Coordinaten, zusammenfallen. Die obere Hälfte des getheilten Winkels heifse α^{I}, die untere Hälfte α^{II}. In Wirklichkeit ist also:

$$\alpha^{I} = \alpha^{II}.$$

Irgend ein Punkt in der theilenden Diagonale möge die Coordinaten x und y haben. — Daraus entsteht, bei jeder beliebigen Länge der Diagonale ein gleichseitiges Quadrat, in welchem sein mufs:

$$\text{tang. } \alpha^{I} = \text{tang. } \alpha^{II} = \frac{x}{y} = \frac{y}{x}.$$

Der Winkel α^{I} ist in Wirklichkeit $= 45^{0}$. — Der scheinbare Winkel α^{I} ist aber $= \alpha^{I} + \varepsilon$. Auf Grund der Volkmann-schen Tabellen können wir sogar berechnen, dafs in diesem Falle das variable ε ungefähr $= 0{,}5^{0}$ sein wird. Demnach wäre der Winkel $\alpha^{I} + \varepsilon$ ungefähr $= 45{,}5^{0}$, oder gleich 45 Grad 30 Minuten.

Offenbar ist nun (scheinbar):

$$\text{tang. } \alpha^{I} > \text{tang. } \alpha^{II} \text{ und also auch } x > y.$$

d. h. die Verticale ist scheinbar kleiner als die Horizontale.

Die Verticale mufs also — wenn der ungetheilte Winkel $(\alpha^{I} + \alpha^{II})$ als ein rechter und die ganze Figur als ein gleichseitiges Viereck anerkannt wird — für gröfser gehalten werden als sie ist, oder als sie sein würde, wenn eine scheinbare Vergröfserung des Winkels α^{I} und damit zugleich eine scheinbare Verkleinerung des Winkels α^{II} nicht stattfände.

Die entferntere Ursache des „constanten Fehlers“ liegt also, auch in diesem Falle, in der Divergenz der verticalen Pseudoparallelen.

Wir möchten zum Ueberflufs hier noch einmal darauf hinweisen, dafs, wenn Höhe und Basis eines gleichseitigen Quadrates von ungleicher Länge zu sein scheinen, die Diagonale den Scheitelpunkt des gegenüberliegenden rechten Winkels scheinbar eben auch nicht treffen kann, sondern noniusartig verschoben an ihm vorbei gehen mufs. Was von der Diagonale gilt, gilt ebenso auch von jeder anderen schrägen Linie, welche durch die obere und untere Horizontale des Quadrates hindurchgeht, ohne im Quadrat selbst sichtbar zu sein. — Mithin lassen sich auch bei horizontaler Lage der Figur 1 dieselben Erscheinungen auf dieselben Grundgesetze zurückführen.

4. Die Trapezformen. Eine andere Täuschung besteht darin, dafs gewisse Trapezformen, ähnlich denen der Fig. 12 a u. c, wenn sie absolut von gleicher Gröfse sind und genau lothrecht über einander gestellt werden, von ungleicher Gröfse zu sein scheinen.



Fig. 12.

Offenbar sind die schrägen Seitenränder an diesen Figuren Dasjenige was die Täuschung hervorruft. — Nehmen wir diese Seitenränder weg, dann bleibt eine Anzahl abwechselnd längerer und kürzerer, über einander gestellter horizontaler oder bogenförmiger Parallelstriche übrig, an denen nichts besonders Bemerkenswerthes wahrzunehmen ist.

Nehmen wir dagegen die parallelen Horizontalstriche fort, dann bleibt eine Täuschungsfigur übrig, die wir bereits kennen gelernt haben. (Fig. 7 c und e.)

Diese Schrägstriche bilden — nach der vorausgesetzten völligen Gleichheit und völlig genauen Uebereinanderordnung — zwei streng-parallele verticale Reihen von Schrägstrichen,

die nach oben scheinbar convergiren oder divergiren je nachdem die Schrägstriche nach oben divergent oder convergent verlaufen, und bewirken dadurch das scheinbare Kleiner- oder Gröfserwerden der über einander gestellten gleichgrofsen Trapeze. — Bemerkenswerth ist, dafs die Täuschung sich leicht abschwächt, oder auch ganz verliert, wenn die Figuren nicht sehr regelmäfsig über einander geordnet sind.

Dieselbe Erscheinung in umgekehrter Anordnung zeigt sich an den beiden gröfseren Trapezen. Fig. 13.





Fig. 13.

5. Eine andere Trapeztäuschung steht mit der obigen in voller Uebereinstimmung. — Die Täuschung besteht darin, dafs eine über der Figur angebrachte, ihrer oberen längeren Seite parallele und gleichlange Linie, kürzer — eine der unteren kürzeren Seite des Trapezes unter ihr angebrachte parallele und gleichlange Linie, länger erscheint als die ihr jedes Mal entsprechende, parallele Trapezseite. (Fig. 14.)



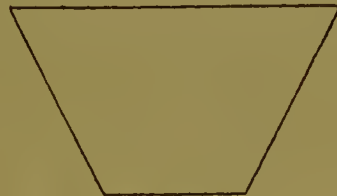




Fig. 14.

Denken wir uns wieder durch die Mitten der beiden Schrägseiten des Trapezes je eine senkrechte Linie — also zwei zu einander vollkommen parallele Linien — gezogen, die, weil jede von ihnen von einer Schräglinie durchkreuzt wird, welche an ihren Aufsenseiten nach oben — an ihren Innenseiten nach unten sich öffnende spitze Winkel bilden, nach oben zu convergiren scheinen, dann mufs jede gleichlange höher liegende Linie, im Zusammenhange mit der Figur betrachtet, kleiner, und jede gleichlange tiefer liegende Linie gröfser erscheinen als sie ist, und folglich auch

gröfser, resp. kleiner, als die mit ihnen gleichlaufenden unteren, resp. oberen Parallelseiten des Trapezes.

6. Ein anderes, auf analoge Grundgesetze zurückzuführendes Beispiel wird von einigen Autoren als Täuschungsfigur angeführt. Diese Figur besteht aus einer Reihe gleichlanger, nach gleichem Radius gezogener und parallel über einander gelagerter Bogenstücke, wobei „ganz wie bei dem Zöllner'schen Muster" zwei, ihre sämmtlichen Endstücke mit einander verbindende verticale, nach oben scheinbar divergirende Parallellinien die Täuschung hervorrufen, dafs „die Gröfse der Kreisbogen von unten nach oben sich stetig zu vergröfsern scheint" (Wundt).

7. Es giebt im täglichen Leben noch eine Menge von Verhältnissen und Figuren, an denen, unter dem vorherrschenden Eindruck eines nach oben divergirenden Pseudoparallelismus, die höher gelegenen Theile gröfser erscheinen als die tiefer liegenden.

Wir wollen nur aus der Buchdruckerschrift einige Beispiele auswählen.

Der Buchstabe S aus der Antiquaschrift soll so aussehen als ob seine obere und seine untere Hälfte gleiche Form und gleiche Gröfse hätten. In Wirklichkeit ist aber Form und Gröfse verschieden; wäre dies nicht der Fall, dann würde die obere Hälfte gröfser zu sein scheinen als die untere. Die eine Hälfte wird deshalb kleiner geschnitten als die andere, und diese kleinere Hälfte mufs nach oben gerichtet sein. Steht die kleinere Hälfte nach unten, dann bemerkt jeder gute Corrector sogleich, dafs der, übrigens vollkommen symmetrisch gebaute Buchstabe verkehrt steht, weil die unten stehende kleinere Hälfte gegen die, als obenstehend nun um so gröfser erscheinende, gröfsere Hälfte verhältnifsmäfsig noch kleiner erscheint als sie in Wirklichkeit ist. Stellt man — wie es sein soll — die kleinere Hälfte nach oben, dann erscheinen beide Hälften in Form und Gröfse vollkommen gleich.

Aehnlich verhält es sich auch mit der Ziffer 8 und ähnlich — wiewohl in weniger auffallender Weise — mit den Buchstaben *B* und *K* und manchen anderen Dingen. Dieselbe Täuschung, mit Rücksicht auf die nach oben oder nach unten sich öffnenden Winkel, läfst sich auch an den Buchstaben *N* und *X* wahrnehmen.

Noch mehr Beispiele anzuführen wäre überflüssig.

8. Hinsichtlich der allgemeinhin sehr schwer zu beurtheilenden Winkelgröfse haben wir noch einige Bemerkungen nachzutragen.

Helmholtz, der über das Gröfsererscheinen spitzer Winkel sich sehr vorsichtig ausdrückt[1], behauptet, dafs in jedem gleichschenkligen Dreieck, dessen dritte Seite horizontal gehalten wird, der Spitzenwinkel immer kleiner erscheint als er ist. Diese Bemerkung erstreckt sich nach ihm auch auf das gleichseitige Dreieck, dessen drei Winkel bekanntlich gleich grofs ($=60^0$) sind. Auch in dem gleichseitigen Dreieck erscheint nach ihm der der horizontalen Basis jedesmal gegenüberliegende Winkel kleiner als die beiden anderen Winkel.

9. In Uebereinstimmung hiermit lesen wir bei Oppel[2] folgende Bemerkung:

„Dieselbe Augentäuschung zeigt sich bei der Construction von Winkeln und Dreiecken. Ein Winkel von 93^0 ... so gezeichnet, dafs seine Halbirungslinie in verticaler Richtung verlaufen würde, wird von dem Auge unbefangener Betrachter willig als ein rechter Winkel anerkannt; — dreht man jetzt die Tafel (auf welcher die Figur gezeichnet ist) um eine Viertelswendung, so dafs die Oeffnung des Winkels nach rechts oder links, d. h. die (gedachte) Halbirungslinie horizontal zu liegen kommt, so erscheint der Winkel sofort als ein stumpfer. Dagegen läfst das Auge einen Winkel von ca. 87^0 in der letztbeschriebenen Lage unbedenklich als einen rechten gelten, während es ihn nach Umdrehung der Zeichnung um eine Viertelswendung sofort als einen spitzen erkennt. Umgekehrt: Verlangt man z. B. ein gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck mit horizontaler Basis, so wird die Mehrzahl der Schüler ein stumpfwinkliges (?) — soll dagegen die Basis aufrecht stehen, ein spitzwinkliges Dreieck zeichnen.“

Nur das eine, von mir mit einem Fragezeichen versehene, Wort: „stumpfwinklig“ stimmt nicht ganz mit Helmholtz überein, oder scheint wenigstens mit ihm nicht ganz übereinzustimmen, denn Helmholtz spricht nicht von rechtwinkligen Dreiecken, sondern nur von gleichseitigen Dreiecken (deren Winkel $=60^0$) und von solchen gleichschenkligen Dreiecken,

[1] „Spitze Winkel erscheinen in der Regel verhältnifsmäfsig zu grofs.“

[2] *Jahresber. des physikalischen Vereins zu Frankfurt a. M.* 1854/55, S. 39.

deren Spitzenwinkel kleiner ist als 60°. Es ist damit nicht ausdrücklich gesagt, dafs es sich ebenso verhalte bei Dreiecken deren Spitzenwinkel gröfser ist als 60°.

Abgesehen von dieser letzteren Differenz, deren endgültige Entscheidung wohl noch weiteren Versuchen anheimgegeben werden mufs, lassen sich die hier unter 8 und 9 angeführten Täuschungen ganz ungezwungen auf unsere divergirenden Pseudoparallellinien und auf die dadurch bedingte Winkelgröfsentäuschung zurückführen.

Man denke sich bei einem auf horizontaler Basis stehendem gleichseitigem Dreieck durch die Mitten der beiden gleichen Schenkel zwei senkrecht stehende Parallelen gelegt, dann erhalten wir ein neues Beispiel zu unserer Fig. 7c u. e, woran wir sehen, dafs die beiden gleichen Schenkel wie Schrägstriche durch die Parallelen wirken, und diese scheinbar zu stärkerer Divergenz nöthigen; dadurch können auch die Schrägstriche — in unserem Falle also die beiden gleichen Dreiecksseiten — weniger convergent, der von ihnen eingeschlossene spitze Winkel also kleiner erscheinen als er ist.

Das Dreieck stellt sich hier einem Trapez gleich, dessen gröfsere Parallelseite als Basis dient und dessen gegenüberliegende kleinere Seite sich bis zum völligen Verschwinden verkleinert. Die Täuschung wird beim Dreieck um so stärker sein, je kleiner der Spitzenwinkel und wird, wenn dieser den (variablen) Werth 2ε erreicht hat — also bevor er noch $= 0$ geworden ist — die beiden Dreiecksseiten als parallel erscheinen lassen. Andererseits wird die Täuschung abnehmen, je gröfser der Spitzenwinkel, und wird gänzlich verschwunden sein, bevor der Spitzenwinkel den Werth von 180° erreicht hat.

Nachträgliches.

Zum Schlufs noch einige nachträgliche Bemerkungen über Prüfungs-Methoden und über andere verwandte Gegenstände.

Die Prüfung geometrisch-optischer Täuschungen ist besonders deshalb so aufserordentlich schwierig, weil sie, innerhalb gewisser Grenzen, in Form und Stärke beständig schwanken und deshalb dem Beobachter keinen festen Halt für tadellos durchführbare Messung darbieten. Will man möglichst reine und allgemein

gültige Resultate erzielen, dann kommt es nieht auf lange Beobaehtungsreihen an, aus denen mittlere Werthe bereehnet werden, es kommt vielmehr auf die Qualität des Beobachters an. Der Beobaehter mufs intelligent und mit guten Sinnen begabt sein — das versteht sich von selbst; er mufs aber aueh — was noch wiehtiger ist — völlig unbefangen sein, d. h. er darf absolut keine Kenntnifs haben von der in Frage stehenden Täuschung. Ein übrigens guter Beobaehter kann schon nach dem zweiten oder dritten Versueh unbrauehbar werden, wenn er vielleieht selbst bemerkt, dafs er sieh getäuseht hat und wenn er sieh nun bemüht seinen Irrthum zu verbessern. Wer die Täuschung bereits kennt, der kann kaum anders als unzuverlässig urtheilen, weil er, sehwankend zwisehen der Fureht den Fehler zu übertreiben und der Besorgnifs ihn allzu ängstlich zu vermeiden, zu einer befriedigenden Entseheidung nicht kommen kann.

Das beste Beobaehter-Material hat wohl Oppel gehabt, der den geometrisehen Zeiehenunterrieht — gewifs nicht zum Naehtheil seiner Sehüler — dazu benutzte um sich über das eonstante Vorkommen gewisser Unriehtigkeiten in den Zeiehnungen genauer zu informiren. Mit ihm beginnt eigentlich erst das Studium dieser Täuschungen und dureh ihn sind die meisten und wichtigsten Täusehungsfiguren bereits bekannt geworden. Es wäre, unseres Erachtens von grofsem Nutzen, wenn, bei Gelegenheit des geometrisehen Zeiehenunterriehtes, die beim Zeiehnen regelmäfsig vorkommenden („eonstanten") Unrichtigkeiten einer ganz besonders aufmerksamen Beaehtung gewürdigt würden. Nieht nur würden die Sehüler sieh frühzeitig an richtiges Sehen und an Vermeidung soleher Fehler gewöhnen; es würde dadurch, ohne allen Zweifel, aueh über etwaige individuelle Disposition, sowie allgemeinhin über die ursächliehen Momente soleher Fehler ein neues und besseres Lieht verbreitet werden.

Volkmann sagt (l. e. S. 213):

„Es würde meines Eraehtens zu weit führen, die sämmtlichen Versuehsreihen mit Hülfe des bisher benutzten Experimentalverfahrens zu wiederholen" . . . . „Weit zweekmäfsiger ist unstreitig, durch Veränderung der Versuchsmethode neue Angriffspunkte zu gewinnen und den unvermeidliehen Beobaehtungsfehlern eine andere Richtung zu geben."

Wir sind nicht im Besitz des Volkmann'schen Versuchs-Apparates und haben unsere — allerdings nicht sehr zahlreichen — Prüfungen nach einer anderen, sehr einfachen, hinsichtlich der Genauigkeit aber vollbefriedigend genauen Methode ausgeführt:

Auf einem gewöhnlichen Zeichenbrett wird ein Bogen Papier befestigt und auf diesem Letzteren eine 30 oder 40 cm lange gerade Linie gezogen. Das Zeichenbrett wird so aufgestellt, dafs dessen Fläche mit der Gesichtsfläche des Beobachters ungefähr parallel, und der gezogene Strich genau lothrecht steht. Nun wird an irgend einer beliebigen Stelle, in der Nähe des unteren Endes der Linie, ein schwarzer Faden befestigt. — Der Beobachter hat alsdann das andere Ende des Fadens so zu richten, dafs ihm beide Linien (der schwarze Faden und der schwarze Strich) genau parallel neben einander zu liegen scheinen. Um aber die gestellte Aufgabe etwas zu erschweren d. h. um es dem Beobachter unmöglich zu machen, die gleichgrofse Entfernung an den äufsersten Enden der beiden Linien nach Augenmaafs mit einander zu vergleichen, wird der obere Theil beider Linien in geeigneter Weise durch ein Blatt Papier verdeckt, so dafs dem Beobachter nur ein verhältnifsmäfsig kleiner Theil (3 oder 4 cm oder je nach Befinden etwas mehr oder weniger) beider Linien zur Beobachtung frei bleibt. Der schwarze Faden der hinter oder unter dem bedeckenden Papierblatt hindurchgeht, mufs, stramm angezogen, vom Beobachter so lange hin und her bewegt werden, bis — seinem Augenmaafs entsprechend — die richtige Parallelrichtung gefunden ist.

Bei diesem Versuche ergiebt sich, fast ohne Ausnahme, dafs, wenn das untere Ende des Fadens neben der r e c h t e n Seite der vertical gezogenen Linie befestigt war, der Faden o b e n n a c h r e c h t s — und wenn er neben der l i n k e n Seite befestigt war, o b e n n a c h l i n k s von der parallelen Richtung abweicht. Bei der beträchtlichen Länge der beiden Schenkel kann der Abweichungswinkel mit mehr als befriedigender Genauigkeit gemessen oder berechnet werden.

Es bedarf keiner besonderen Erwähnung, dafs man dieselbe Prüfung auch bei jeder beliebigen S c h r ä g s t e l l u n g der, anfänglich lothrechten Linie, ebenso wie auch bei h o r i z o n t a l e r Stellung, vornehmen kann. — Der Abweichungswinkel wird kleiner je mehr man sich der horizontalen Richtung nähert; er

wird aber, bei hinreichend erschwertem Versuch, selten oder nur ausnahmsweise = 0. In der Mehrzahl der Versuchsfälle fand sich der verdeckte Versuchsfaden etwas gesenkt, und zwar, wenn der Faden in der Mitte, gerade vor dem Beobachter befestigt war und der Versuch nach rechts hin ausgeführt wurde, — nach rechts und unten, wenn er nach links hin ausgeführt wurde — nach links und unten.

Dieses noch sehr primitive Versuchs-Verfahren würde sich leicht verbessern lassen, wenn an der Hinter- resp. Unterseite des Zeichenbrettes eine Vorrichtung angebracht würde, welche die unmittelbare Führung des Fadens durch die Hand ersetzt. Die Führung des Fadens könnte dadurch bequemer, und zugleich — durch den Wegfall des Orientirungsgefühls in der führenden Hand — erheblich unabhängiger gemacht werden.

Volkmann beschreibt das von ihm eingeschlagene Verfahren und das von ihm für seine Untersuchung benutzte Instrument mit folgenden Worten:

„An einer geraden, vor den Augen befindlichen senkrechten Wand sind zwei Drehscheiben so angebracht, dafs der Drehpunkt einer jeden in der optischen Axe des bezüglichen, auf die unendliche Ferne gerichteten Auges liegt. Auf jeder Scheibe ist eine feine Linie verzeichnet, welche das Centrum der Scheibe schneidet und also mit der Umdrehung dieser ihrer Lage ändert".

„Ich betrachte die auf den Scheiben befindlichen Linien (kurz: die Diameter) unter minimaler Convergenz der Augenaxen, sehe sie also in sehr wenig distanten Doppelbildern und verlange in der Erscheinung absoluten Parallelismus beider. Ich bemühe mich, während ich die eine Scheibe unberührt lasse, diesen Parallelismus durch Umdrehung der anderen Scheibe herzustellen."

Alles binoculäre Sehen müssen wir uns vorstellen als zusammengesetzt aus zwei, etwas von einander verschiedenen Bildern, von denen das eine dem rechten, das andere dem linken Auge angehört. Allerdings verschmelzen diese beiden Bilder zu einem zweieinigen Gesammtbilde, in welchem jedes einzelne Bild als solches nicht mehr unterscheidbar ist; immerhin aber doch so, dafs jedes seine Eigenthümlichkeit zu behaupten sucht, und bis zu gewissem Grade zu behaupten vermag. — Innerhalb

der strengen Grenzen des centralen Sehens ist von einer Selbstständigkeit der beiden Bilder Nichts zu bemerken; jenseits dieser Grenzen — also, da wo das excentrische Sehen beginnt — beginnt sogleich auch die Disjunction des Gesammtbildes. Die Selbstständigkeit des rechten und linken Auges tritt deutlicher und stärker hervor; an den Grenzen des centralen Sehens beginnt eine gerade Linie sich gabelförmig zu spalten. Wir bemerken dies freilich nicht immer sogleich und auch nicht ganz leicht, weil — wie früher schon einmal gesagt wurde — bei der Beweglichkeit unserer Augen, jede excentrische Stelle des Sehens, in jedem kleinsten Zeitmoment, sogleich wieder zur Centralstelle des Sehens gemacht werden kann. Aus der mosaikartigen Zusammensetzung unzähliger centraler Bildpunkte entsteht dann erst der Totaleindruck eines einzigen grofsen centralgesehenen Bildes, in welchem alle etwaigen Ungleichmäfsigkeiten excentrischer Neben-Beobachtung verwischt sind.

In der Medianlinie, wenn der betrachtete (körperliche) Gegenstand vom jedem der beiden Augen gleich weit entfernt ist, zeigt sich das binoculäre Sehen am regelmäfsigsten und vollkommensten. Liegt der (körperliche) Gegenstand weiter nach rechts, dann sieht das linke Auge — liegt er weiter nach links, dann sieht das rechte Auge etwas mehr von dem was das andere Auge n i c h t sieht. — In der Ebene erscheint der Zwischenraum zweier Parallellinien dem rechten Auge etwas weniger breit als dem linken, wenn dieser Gegenstand von der Mitte aus weiter nach links verschoben wird, und etwas breiter, wenn er nach rechts verschoben wird; — und umgekehrt. Die Verschiedenheit der beiden Augenbilder wird im Allgemeinen gröfser, je weiter der Gegenstand sich von der Mittellinie entfernt. Wir dürfen aber nicht übersehen, dafs diese Verschiedenheit — wenn auch in kaum bemerklicher Weise — schon in nächster Nähe neben der Median-Ebene anfängt und in grofser Nähe beträchtlicher ist als in weiter Ferne.

Jedes unserer beiden Augen hat — wie wir anzunehmen nicht gut umhin können — seinen eigenen kugelförmigen Horopter[1], dessen Mittelpunkt in dem Drehpunkte des Auges liegt. — Eine in der Median-Ebene des Körpers gelegene verticale

[1] Richtiger wäre vielleicht, die Netzhautform in der macula lutea als ellipsoide Rotationsfläche gelten zu lassen.

Linie entspricht einem Horopter-Meridian in jedem der beiden Augen; aber der rechte Horopter-Meridian kann mit dem linken Horopter-Meridian nur auf eine begrenzte Stelle vollständig verschmelzen; ein wenig höher und ein wenig niedriger, gehen die beiden Bilder gekreuzt, als selbstständige dem linken und dem rechten Auge angehörige Meridiane, wieder aus einander, wenn nicht die Blickrichtung und Blickbewegung dem Verschmelzungsbilde (unwillkürlich) so rasch nachfolgt, dafs man die Kreuzung gar nicht wahrnehmen kann.

Man kann sich von der Verschiedenheit der Einzel-Empfindung beider Augen durch folgenden sehr einfachen Versuch leicht überzeugen.

Wenn man einen Punkt fest fixirt und dabei in rascher Folge, bald das e i n e, bald das a n d e r e Auge verschliefst, dann scheint der fixirte Punkt sich in homokinetischer Richtung mit dem Verschlufs zu bewegen: Der Punkt entweicht nach rechts, wenn das rechte, und nach links, wenn das linke Auge verschlossen wird. — Macht man denselben Versuch an einem verticalen Strich, oder, noch besser, an einem weiter entfernten verticalen Gegenstande wie z. B. an einer Telegraphenstange, oder an einem einzeln stehenden, hohen Fabrikschornstein, oder auch nur an der verticalen Begrenzungslinie eines Hauses, dann bemerkt man sehr deutlich eine abwechselnde Schrägstellung der verticalen Linie: das obere Ende entweicht nach links, wenn das linke — und entweicht nach rechts, wenn das rechte Auge geschlossen wird. Die Erscheinung gleicht vollkommen einer im umgekehrten Sinne (nach oben) schwingenden Pendelbewegung, wobei der unbewegliche Drehpunkt der Schwingung u n t e r dem Horizonte liegt.

In gleicher Weise kann man sich auch von dem scheinbaren Schwanken einer h o r i z o n t a l e n Linie überzeugen. — Verfolgt man, bei ebendemselben Versuche, die scheinbare Bewegung einer h o r i z o n t a l gerichteten Linie, dann bemerkt man, dafs beim Verschlufs des rechten Auges das linke — und beim Verschlufs des linken Auges das rechte Ende der betrachteten Linie, sich über das horizontale Niveau ein wenig erhebt, während das andere Ende sich dementsprechend ein wenig senkt.

Dieses sehr merkwürdige Verhalten, worüber spätere Untersuchungen uns gewifs noch näheren Aufschlufs geben werden, ist sehr geeignet uns von dem S c h r ä g s c h e i n e n einer loth-

rechten Linie zu überzeugen, und giebt uns zugleich einen unverkennbaren Hinweis auf die Entstehung scheinbarer Divergenz verticalstehender paralleler Linien. — Versetzen wir die verticale Linie aus der Medianebene weiter nach links oder weiter nach rechts, dann wird damit zugleich das rechte oder das linke Auge beim binoculären Sehact dominirend und die dem entsprechenden Auge angehörige Schrägheit des verticalen Meridians tritt mehr oder weniger deutlich in die Erscheinung.

Bei allen hierhergehörigen sogen. Täuschungen kann von einer fehlerhaften Function unserer Sinnesorgane nicht die Rede sein; vielmehr ist immer anzunehmen, dafs die Täuschung durch ungenügende Aufmerksamkeit, oder — wenn man lieber will — durch unrichtiges Verständnifs der Sinneseindrücke zu Stande kommt. — Die Täuschung ist da, aber sie ist nicht zu jeder Zeit und nicht für Jedermann in gleichem Grade da; sie ist aber da für Jeden, der — wenn auch nur zeitenweise — unaufmerksam ist, oder von dem Verständnifs seiner Sinneseindrücke zeitweise keinen richtigen Gebrauch macht.

In einem solchen Zustande ungenügender Aufmerksamkeit befinden sich gewifs die meisten Menschen, wenn sie auf das Couvert eines adressirten Briefes eine Briefmarke aufkleben! — Im Allgemeinen darf man wohl annehmen, dafs ordnungsliebende Menschen stets die Absicht haben, die Marke winkelrecht an richtiger Stelle aufzukleben. Da aber die Sache selbst ungemein gleichgültig ist, so wird schwerlich Jemand viel Zeit und Mühe darauf verwenden; man wird im Allgemeinen sich ziemlich gleichgültig und unaufmerksam dabei verhalten. — Und was sagt die Erfahrung? — Ich habe eine grofse Anzahl von Briefadressen, hinsichtlich des richtigen Standes der aufgeklebten Briefmarke, anfänglich sehr genau nachgemessen, späterhin nur schätzungsweise geprüft, und habe gefunden, dafs unter 4 oder 5 Adressen kaum e i n e sich findet, an der die Marke ganz untadelhaft winkelrecht aufgeklebt ist. Besonders merkwürdig ist aber, dafs, mit seltenen Ausnahmen, die s c h i e f aufgeklebten Briefmarken oben nach r e c h t s s c h i e f stehen. Sehr selten — unter 20 Adressen kaum einmal — findet sich in der oberen rechten Ecke eine l i n k s s c h i e f eingeklebte Marke. Wäre es postvorschriftlich erlaubt, die Postmarken in die obere linke Ecke zu kleben, dann würden — ich zweifle nicht daran — die Mehrzahl der Briefmarken l i n k s s c h i e f eingeklebt werden. — Ausgeschlossen von der Prüfung

wurden solche Adressen, deren Briefmarken total verkehrt oder horizontal oder anderweitig falsch aufgeklebt waren, in der Voraussetzung, dafs in solchem Falle die Absicht regelrecht aufzukleben gar nicht vorhanden war.

Ein Zusammenhang mit der Steilschrift oder Schrägschrift der zugehörigen Adressanten war in den uns vorliegenden Exemplaren entschieden nicht nachweisbar; vielleicht steht aber die unschöne Schrägschrift, die man aus den Schulen zu verbannen in neuerer Zeit eifrigst bemüht ist, in physiologischem Zusammenhange mit der Schrägstellung des verticalen Meridians. — Auch die nicht selten vorkommende kleine Unart: beim Schreiben die Zeilen gegen das Ende zu weit aufwärts zu führen, gehört unstreitig hierher.

Ob diese Anomalie auch bei solchen Schriftarten vorkommt, die von rechts nach links, oder von oben nach unten verlaufen, ist mir unbekannt.

(*Eingegangen am 31. Januar 1899.*)

Druck von Lippert & Co. (G. Pätz'sche Buchdr.), Naumburg a. S.